Aide mémoire d'optimisation élémentaire

Classification MSC 2000: 49-01, 65-01, 90-01

B. Rousselet [1]

en cours de rédaction fvrier 2006

[1] *Laboratoire de Mathématiques, Parc Valrose, F 06108 Nice, Cédex 2, email :* br@math.unice.fr

Table des matières

1 Introduction ; optimisation sans contraintes **2**

1.1 Premiers pas 2

1.1.1 Orientation 2

1.1.2 Notations 2

1.1.3 Rappel de calcul différentiel : 3

1.2 Résultats de base 6

1.3 Projection sur un sous -espace paramétré 8

1.3.1 Introduction - Notations 8

1.3.2 Résolution au sens des moindres carrés 9

1.3.3 Projection et résolubilité 11

1.4 Systèmes surdéterminés 13

1.5 Minimisation dans $I\!R^n$ 14

1.5.1 Introduction 14

1.5.2 Rappel de calcul différentiel 15

1.5.3 Résultats de base 16

1.5.4 Convexité, ellipticité 18

1.6 Algorithmes pour l'optimisation sans contraintes... 19

1.6.1 Algorithme du gradient 19

1.7 Mise en oeuvre d'algorithmes 21

2 Minimisation avec contraintes **23**

2.1 Minimisation avec contraintes d'égalités linéaires 23

2.2 Fonction quadratique avec contraintes d'égalités linéaires 28

2.2.1 Introduction 28

2.2.2 Elimination 28

2.2.3 Algorithmes d'élimination généralisée 29

2.2.4 Triangulation par des matrices orthogonales 30

2.2.5 Programmation quadratique (par minimisation sucessive de fonctions quadratiques avec contraintes d'égalités) . . 33

2.3 Minimisation avec contraintes 35

2.3.1 Condition d'optimalité avec contraintes d'égalité 35

2.3.2 Minimisation avec contraintes d'inégalités 39

2.4 Sensitivité de la valeur optimale e la fonction 46

2.4.1 Introduction, coût marginal 46

2.4.2 Résultat 46

—— Fin de la table des matiè res——

Chapitre 1

Introduction ; optimisation sans contraintes

1.1 Premiers pas

1.1.1 Orientation

Nous considérons dans ce chapitre la minimisation de fonctions en dimension finie (ce qui signifie dans notre cas un espace vectoriel E de dimension finie sur $I\!R$; on l'identifiera le plus souvent à $I\!R^n$).
Nous considérons d'abord le cas significatif des fonctions quadratiques ; ceci par souci de simplicité mais aussi parceque au voisinage d'un minimum, une fonction peut être approchée par une fonction quadratique (écrire une formule de Taylor, voir équation (1.7)).
Nous verrons dans les chapitres suivants que cela intervient tant du point de vue théorique qu' algorithmique : une condition suffisante pour un optimum local dans $\mathbb{R}^n$ est que le *Hessien* soit *défini positif* ; l'algorithme de Newton pour minimiser une fonction consiste à l'approcher par une fonction quadratique ; les méthodes dites de quasi-Newton reposent sur une variante de cette idée et constituent une classe très importante d'algorithmes ; voir aussi les algorithmes d'optimisation avec contraintes.

1.1.2 Notations

– E, Espace vectoriel de dimension finie n

– $a : E \times E \longrightarrow I\!R$, forme bilinéaire symétrique.

– $\ell : E \longrightarrow I\!R$, forme linéaire.

Rappelons qu'en dimension finie les formes linéaires et bilinéaires sont continues ; le produit scalaire dans E est noté $(\underline{x}, \underline{y})$, $\|\underline{x}\|$ désigne la norme associée.

Après choix d'une base $(\underline{e}_i)_{1\leq i\leq n}$, $\underline{x} = \sum_{j=1}^{n} x_i\, \underline{e}_i \quad \underline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_j\, \underline{e}_j$

$\ell(\underline{x}) = {}^t\mathcal{F}\, x \qquad a(\underline{x}, \underline{y}) = {}^t y\, A\, x$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ avec $A_{i\,j} = a(e_i, e_j)$

l'expression de droite est un produit matriciel, ${}^t y$ désigne le transposé de y : ${}^t y = [y_1, ..., y_n]$;

$\boxed{\text{noter la différence de position de}}\ \underline{y}$ et de $y \qquad a(\underline{x}, \underline{y}) = {}^t y\, A\, x$; comme a est symétrique, A est une matrice symétrique ; quand la base est orthonormée $(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y_i} = {}^t y\, x$, $\|\underline{x}\|^2 = {}^t x\, x = \|x\|^2$. Notons que A est aussi matrice de l'application linéaire $\mathcal{A}$ associée à la forme bilinéaire a : $a(\underline{x}, \underline{y}) = (\mathcal{A}\underline{x}, \underline{y})$

Indiquons que le cas de fonctions en dimension finie est souvent une approximation de fonctionnelles définie sur des espaces de fonctions de dimension infinie ; c'est le cas classique de la méthode de Galerkine et en particulier de la méthode des éléments finis.

Polynômes quadratiques Soit $P(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1\, x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f$; son écriture matricielle fait intervenir $b/2$:

$$P(x_1, x_2) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [c, d] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + f$$

1.1.3 Rappel de calcul différentiel :

Dérivée directionnelle (ou de Gateau)

$J : E \longrightarrow I\!R$ admet au point $\underline{x}$ une dérivée dans la direction $\underline{y}$ *si et seulement si* $\lim_{t\to 0} \frac{J(x+ty) - J(x)}{t}$ existe ; on la note $J'(x, y)$.

Définition 1.1. *Différentielle (ou dérivée au sens de Fréchet)*

$J : E \longrightarrow I\!R$ est différentiable (ou dérivable au sens de Fréchet) en $\underline{x}$ si et seulement si il existe une forme linéaire notée $J'(\underline{x})$ telle que pour tout $\underline{y} \in E$

$|J(\underline{x}+\underline{y}) - J(\underline{x}) - J'(\underline{x})\,\underline{y}| = o(\|\underline{y}\|)$ *quand* $y \to 0$ *ou* $\lim_{\|y\|\to 0} \frac{|J(\underline{x}+\underline{y}) - J(\underline{x}) - J'(\underline{x})\,\underline{y}|}{\|y\|} = 0$

Lignes de niveau Ce sont les courbes définies implicitement par les équations

$$J(x) = c$$

pour divereses valeurs du niveau c.

Approximation linéaire de J au point $\underline{u}$

$$\boxed{J(u) + J'(u)(x - u)}$$

Cette approximation est locale près du point u.

Remarque 1.1. *L'existence de la dérivée au sens de Gateau est un peu plus forte que l'existence de dérivées partielles pour lesquelles la limite du quotient différentiel n'existe que pour $y = a_i$ une base de E ; remarquer la notation : $J'(x, a_i) = \dfrac{\partial J}{\partial x_i}$.*
On donne dans les cours élémentaires des contre exemples variés de fonctions dérivables au sens de Gateau qui ne le sont pas au sens de Fréchet mais on montrera facilement que les fonctions dérivables au sens de Fréchet le sont au sens de Gateau ; la non équivalence résulte de situations plutôt pathologiques !

On démontre en calcul différentiel :

Proposition 1.1. *Si une fonction $J : E \longrightarrow I\!R$ admet des dérivées partielles dans un voisinage de $\underline{x}$ et que ces dérivées partielles sont continues en $\underline{x}$, alors J est différentiable en $\underline{x}$ (ou dérivable au sens de Fréchet) et l'on a :*

$$\boxed{J'(\underline{x})y = \sum \frac{\partial J}{\partial x_i}(\underline{x}_i)y_i} \tag{1.1}$$

Polynômes quadratiques Les dérivées partielles :

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 2ax_1 + bx_2 + d, \quad \frac{P}{x_2} = bx_1 + 2cx_2 + e$$

ce sont des polynômes donc des fonctions continues, par suite :
$\boxed{\text{les polynômes quadratiques sont différentiables en tout point ;}}$ (par récurrence on montrerait que tous les polynômes sont différentiables.

Ecriture matricielle :

$$P'(x)y = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + [d, e] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Coniques En géométrie les courbes de niveau de polynomes quadratiques s'appellent coniques (elles corespondent à des sections de cones par des plans !).
- Quand $4ac - b^2 = 0$, il s'agit de droites ou d'une parabole ;
- Si $b = 0$ et $c = 0$ (ou a=0), on reconait l'équation d'une parabole
- Dans le cas où le déterminant $4ac - b^2$ est non nul, le centre de la conique est dé fini par l'annulation :
$$P'(x) = 0$$
, soit (ξ, η) ce centre ; posons $x = \xi + X$, $y = \eta + Y$, il vient :
$$P(x, y) = aX^2 + bXY + cY^2 + P(\xi, \eta)$$

Pour préciser la nature de la courbe, le signe du déterminant $4ac - b^2$, (par exemple mettre le trinôme sous forme canonique) permet de distinguer :
- une ellipse : $4ac - b^2 > 0$,
- hyperbole : $4ac - b^2 < 0$,

ATTENTION **à la notion de gradient très utile en optimisation.**

Définition 1.2. *Le gradient associé à la forme linéaire de la dérivee est défini par la formule :*

$$\boxed{\forall y \;\; J'(x,y) = (gradJ, y) \;\; ou \; (gradJ, a_i) = J'(x, a_i) = \frac{\partial J}{\partial x_i}}$$

MAIS *les composantes de $gradJ$ ne sont pas $(gradJ, a_i)$ sauf si la base est orthonormée.*

Gradient et courbes de niveau

Proposition 1.2. *Le vecteur $gradJ(x)$ est orthogonal à la courbe de niveau passant par x et dirigé dans le sens des J croissants.*

Ad En effet, soit $t \mapsto x(t)$ un paramétrage de la courbe de niveau, on a en dérivant $J(x(t)) = J(x_0)$:

$$gradJ(x_0).\frac{dx}{dt} = 0$$

d'autre part :

$$J(x_0 + \rho gradJ(x_0))) = J(x_0) + \rho gradJ(x_0).gradJ(x_0) + o(\rho)$$

montre la deuxième assertion.

Lemme 1. *Parmi tous les vecteurs y de norme 1, $J'(x,y)$ est maximum (resp. minimum) pour $y = \frac{gradJ}{\|gradJ\|}$ (resp. $y = -\frac{gradJ}{\|gradJ\|}$)*

Remarque 1.2. *Pour une piste de ski d'équation $x_3 = J(x_1, x_2)$, $y = -\frac{gradJ}{\|gradJ\|}$ est la direction de déplacement de* $\boxed{\textit{plus grande pente.}}$

Démonstration à voir pour un polynôme quadratique ; cas général admis (voir calcul diiférentiel : théorème des fonctions implicites.

Si le gradient est grand, les courbes de niveau sont plus rapprochées : soient les courbes $J(x) = c$ et $J(x + \delta x) = c + \delta c$, on a alors : $gradJ(x) \,.\, \delta x = \delta c$; pour un δc donné, plus le gradient est de grand module plus la composante de δx sur ce gradient est grande : ce qui fait des courbes de niveau rapprochées !

Polynômes quadratiques Le gradient de P :

$$grad(P) = \begin{bmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$$

– Courbes de niveau de $P = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}$;
– Courbes de niveau de $P = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}$;
– Condition pour courbes de niveau elliptiques pour un polynôme quadratique :

$$ac - \frac{b^2}{4} > 0$$

.
– Convexité : $a > 0$ et

$$ac - \frac{b^2}{4} > 0$$

.

Exercice 1.1. *Dans le cas où la base a_i n'est pas orthonormée, écrire un système linéaire qui fournit les composantes d'un vecteur associé à une forme linéaire (et donc celle du gradient à partir des dérivées partielles).*
suggestion : la matrice M est donnée par $M_{i,j} = (a_i, a_j)$; cette matrice porte le nom de Gramm.

Exercice 1.2. *Montrer que $J(\underline{x}) = \frac{1}{2}a(\underline{x}, \underline{x}) - \ell(\underline{x})$ est Fréchet dérivable et de dérivée*

$$J'(\underline{x}, \underline{y}) \; = \; a(\underline{x}, \underline{y}) - \ell(\underline{y}) = {}^t y\, A\, x - {}^t F\, y$$

.

Exercice 1.3. *Montrer qu'une fonction dérivable au sens de Fréchet l'est au sens de Gateau.*

1.2 Résultats de base

Proposition 1.3. *Soit E espace vectoriel de dimension n*
$a \;:\; E \times E \longrightarrow I\!R$ *une forme bilinéaire symétrique*
$b \;:\; E \longrightarrow I\!R$ *une forme linéaire*
et $J \;:\; E \longrightarrow I\!R$ $\quad J(\underline{x}) = \frac{1}{2}a(\underline{x}, \underline{x}) - \ell(\underline{x}) = \frac{1}{2}{}^t x\, A\, x \; - \; {}^t x\, F$;
abus de notations $J(\underline{x}) = J(x)$
(i) si J atteint un minimum relatif ou local en un point $\underline{x}_* \in E$ alors
$\forall \underline{y} \in E \quad J'(\underline{x}_*, \underline{y}) = 0$ *ou* $Ax_* = F$
(condition nécessaire d'optimalité ou C.N.O.)
(ii) Si de plus la forme bilinéaire est définie positive : $\exists \gamma > 0 \;,\; \forall \underline{x} \in E \quad a(\underline{x}, \underline{x}) \geq \gamma \|\underline{x}\|^2$
(ou ${}^t x\, A\, x \geq \gamma\, \|x\|^2$) la C.N.O. admet une unique solution x_* et cette solution réalise le minimum absolu (ou global) de J sur E. Elle est donc aussi C.S.O. (condition suffisante d'optimalité)[1]

[1] Si besoin, clarifier son vocabulaire logique : il faut, condition nécessaire ; il suffit, condition suffisante !

La démonstration est simple et ses méthodes s'étendent à des situations plus compliquées (voir §1.3)
(i) soit x_* un minimum relatif de J, alors pour tout $y \in E$ et $t \in I\!R$ petit $J(\underline{x_*} + t\underline{y}) \geq J(\underline{x_*})$

donc pour $t > 0$ $\qquad \dfrac{J(\underline{x_*} + t\underline{y}) - J(\underline{x*})}{t} \geq 0$

et pour $t < 0$ $\qquad \dfrac{J(\underline{x_*} + t\underline{y}) - J(\underline{x*})}{t} \leq 0$.

D'où en faisant tendre $t \longrightarrow 0$ par valeurs positives $J'(\underline{x_*}, \underline{y}) \geq 0$
puis par valeurs négatives $J'(\underline{x_*}, \underline{y}) \leq 0$
et donc $J'(\underline{x_*}, \underline{y}) = 0$ ce qui se traduit par $\forall y \in I\!R^n \quad {}^t\,(A\,x_* \;-\; F) \;=\; 0$ d'où $A\,x_* \;-\; F \;=\; 0.$

(ii)

Lemme 2. *: Sous l'hypothèse (ii), soit $\mathcal{A}$ l'application linéaire associée à a : $a(\underline{x}, \underline{y}) = (\mathcal{A}\,\underline{x}, \underline{y})$, $\mathcal{A}$ est bijective ; la matrice associée est inversible.*

En effet : si $\mathcal{A}\,\underline{x} \;=\; 0$ alors $a(\underline{x}, \underline{x}) = 0$ et donc avec l'hypothèse $\underline{x} = 0$, $\mathcal{A}$ est injective et donc bijective puisque nous sommes en dimension finie. ■

Conséquence : la C.N.O. admet une unique solution ; de plus un calcul facile donne :

$$J(x+y) \;=\; J(x) \;+\; {}^t y\,A\,x \;-\; {}^t y\,F \;+\; \frac{1}{2}\,{}^t y\,A\,y$$

quand $x = x_*$, la C.N.O. fournit :

$$J(x_* + y) \;=\; J(x_*) \;+ \frac{1}{2}\,{}^t y\,A\,y$$

on a donc bien $\forall y \in I\!R^n \quad J(x_* + y) \;\geq\; J(x_*)$ ce qui montre que x_* est bien un minimum absolu (ou global) et non pas relatif (ou local).

Exercice 1.4. *(rappel)*
• *a définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de $\mathcal{A}$ (ou de A) sont strictement positives.*
• *a est définie positive si et seulement si : $\forall x \in E \quad a(x,x) > 0$ (avec E de dimension finie).*

Exercice 1.5. *a) exprimer J dans une base de valeurs propres de $\mathcal{A}$, determiner ainsi le minimum de J.*
b) En dimension 2 ou 3 , former les courbes de niveau de J.
c) Cette méthode est elle interéssante numériquement dans le cas où A est une matrice 1000 × 1000 ?
(Consulter éventuellement un cours d'analyse numérique matricielle)

Exercice 1.6. *a) Reformuler la proposition si A est définie négative.*
b) Que peut -on dire si les valeurs propres de A sont positives ou nulles ? (courbes de niveau).

c) Mêmes questions si les valeurs propres sont de signe quelconque mais non nulles ? (courbes de niveau).

Exercice 1.7. *(élémentaire)*
Soit $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1\, x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2$
a) Calculer la dérivée de f
b) en déduire une écriture matricielle de f.

Exercice 1.8. *1. Soit* B *matrice à* n *lignes et* m *colonnes indépendantes avec* $n \geq m$, *montrer que* $A = {}^tB\, B$ *est une matrice* $m \times m$ *symétrique et définie positive.*

1.3 Projection sur un sous -espace paramétré

1.3.1 Introduction - Notations

Pour une bonne compréhension de l'optimisation , il me parait indispensable de maîtriser d'une part l'algèbre linéaire et le calcul matriciel et d'autre part la géométrie affine euclidienne ; nous rappelons ici quelques principes utiles dans ce paragraphe ; se reporter à un manuel de base.
Soit donc E un espace vectoriel euclidien (muni d'un produit scalaire) de dimension n et soient $(b_j)_{1 \leq j \leq m}$ un système <u>libre</u> vecteurs de E ; le sous -espace vectoriel engendré

$$\mathcal{F} = \left\{ \underline{y} \in E, \quad \exists\, (x_j)_{1 \leq j \leq m} \in I\!R^m \; y = \sum_{i=1}^{m} x_j\, \underline{b}_j \right\} \tag{1.2}$$

$\mathcal{F}$ est un **sous- espace paramétré** ; les x_j sont les paramètres ;

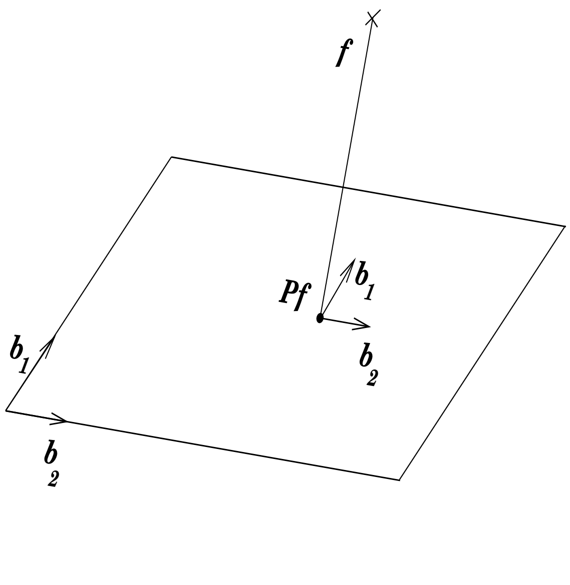


FIG. 1.1 – Projection orthogonale de $f \in E$

il est bien connu en géométrie euclidienne que si $\underline{f} \in E$, il existe une unique projection orthogonale $P\underline{f} \in \mathcal{F}$, il existe donc des paramètres λ_{j*} tels que $P\underline{f} = \sum \lambda_{j\,*}\, \underline{b}_j$ vérifient pour $k = 1, ..., m$.

$$\left(\underline{f} \;-\; \sum_{i=1}^{m} \lambda_{i*}\, \underline{b}_i \;,\; \underline{b}_k \right) \quad = \quad 0 \tag{1.3}$$

Nous allons écrire matriciellement cette relation et la retrouver à l'aide du résultat du §1.1.

Après le choix d'une base $(\underline{e}_i)_{i=1,...,n}$ comme dans l'introduction, $\underline{b}_j = \sum_{i=1}^{n} b_{i\,j}\; e_i$, posons $b_j = \begin{bmatrix} b_{1\,j} \\ \vdots \\ b_{n\,j} \end{bmatrix}$ et B matrice de coefficients $b_{i\,j}$; il sera commode parfois de considérer B par blocs : $B \;=\; [b_1, ..., b_m]$ où les b_i désignent donc les blocs des colonnes de B ; dans ces conditions si $x \in I\!R^m$ on peut effectuer le produit par blocs : $B\,x \;=\; \sum b_j\; x_j \;=\; \sum x_j\; b_j$ et il convient de remarquer que $\sum x_j\, b_j$ sont les composantes du vecteur $\sum x_j\; \underline{b}_j$; noter que dans l'usage des espaces vectoriels on écrit les scalaires à gauche des vecteurs mais quand on veut representer $\sum x_j\; \underline{b}_j$ par un produit matriciel par blocs $Bx = [b_1, ..., b_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ les scalaires apparaissent à droite du vecteur.

Exercice 1.9. *Interpreter par blocs le produit* ${}^t y\; B$ *; caractériser le noyau de* ${}^t B$ *; comparer avec* ImB.

Exercice 1.10. *Utiliser une représentation graphique des matrices rectangulaires* $\boxed{B}$ *; interpreter ainsi* $B\,x$, ${}^t B\, B$, $B\,{}^t B$ *;* ${}^t y\; {}^t B$....

Nous pouvons donc écrire matriciellement (1.3) en supposant que $\underline{e}_i$ est une base orthonormale :

$$(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = {}^t\underline{e}_i\; \underline{e}_j = \delta_{ij} \quad {}^t\,(f - B\,x_*)\; b_k \;=\; 0 \;\text{ et donc }\; {}^t\,(f - B\,x_*)\; B \;=\; 0 \tag{1.4}$$

C'est cette dernière équation que nous allons retrouver.

1.3.2 Résolution au sens des moindres carrés

Dans la pratique il est fréquent que l'on ait à résoudre un système linéaire $B\,x \;=\; f$ avec B matrice à n lignes et m colonnes (indépendantes), avec $n \geq m$.
Nous verrons au §3. que ce système peut admettre des solutions mais le cas le plus fréquent est qu'il n'admette pas de solutions quand $n \;>\; m$: " il y a trop d'équations, le système est surdeterminé". Quand on a besoin d'une "solution " on utilise souvent la notion de " solution au sens des moindres carrés ".
Résoudre au sens des moindres carrés signifie chercher le $x_* \in I\!R^m$ qui minimise $J(x) \;=\; \|B\,x \;-\; \underline{f}\,\|_2^2$ C'est à dire le carré de la distance de f au sous- espace $\mathcal{F}$

défini en (1.3) où $\|\underline{y}\|_2^2 = (y, y) = {}^t y\, y$ est le produit scalaire de E.

Dorénavant nous omettrons l'indice 2 pour la norme : $\|\underline{y}\|^2 = (y, y)$.

Proposition 1.4. *: Soit B une matrice à n lignes et m colonnes indépendantes, il existe un x^* unique qui minimise $J(x) = \|Bx - f\|^2$; il satisfait la condition nécessaire et suffisante ${}^t e^*\, B = 0$ avec $e^* = f - B\, x^*$. Ceci définit x^* solution de ${}^t B\, B\, x^* - {}^t B\, f = 0$.*

Interprétation géométrique : $B\, x^*$ n'est autre que le vecteur colonne de la projection orthogonale Pf sur $\mathcal{F}$; en effet ${}^t e^*\, B = 0$ n'est autre que (1.4), une écriture matricielle de (1.3) ; cette proposition n'est donc rien d'autre que : " la perpendiculaire est plus courte que toute oblique ". (comme disait l'un de mes professeurs de Lycée) ; mais on peut dire aussi dans ce contexte que l'erreur e_* est orthogonale aux colonnes de B.
La Démonstration peut se faire simplement avec le résultat de base du §1.1
D'abord en dévelopant le produit matriciel : $J(x) = {}^t(B\, x - f)\,(B\, x - f)$ on trouve $J(x) = {}^t x\, {}^t B\, B\, x - 2\, {}^t x\, {}^t B\, f + {}^t f\, f$ qui est donc de la forme du J de la proposition **??** avec
$A = 2{}^t B\, B \qquad F = 2{}^t B\, f \qquad E = I\!R^m$ et avec un terme constant ${}^t f\, f$ qui n'intervient pas dans la détermination de x ; enfin avec l'exercice 5, $A = {}^t B\, B$ est définie positive ; la proposition 2 indique donc l'existence, et l'unicité du minimum x_*, elle fournit de plus la *C.N.S.O.* $\quad A\, x_* - F = 0 \quad$ soit ici ${}^t B\, B\, x_* - {}^t B\, f = 0$ ou ${}^t B\, (B\, x_* - f) = 0$ ■

Utilisation pratique : pour déterminer la "solution au sens des moindres carrés " on résout les équations dites "normales "

$${}^t B\ B\ x_* \quad = \quad {}^t B\ f$$

elles ne sont autres qu'une autre écriture de ${}^t B\, e^* = 0$.
Si vous avez fait l'exercice 1.8, vous savez que ${}^t B\, B$ est une matrice carrée $m \times m$; il est donc numériquement facile de résoudre au sens des moindres carrés si vous avez peu d'inconnues même avec beaucoups d'équations !

Exercice 1.11. *(lissage par une droite, droite des moindres carrés)*
on dispose de points (ξ_i, η_i) et l'on souhaite trouver une droite qui passe au mieux par les points (ξ_i, eta_i)

(pensez à des points de mesure de 2 quantités ξ et η supposées reliées par une loi linéaire $\eta = c + d\xi$ de coefficient c et d inconnu) ; on va chercher cette droite au sens des moindres carrés i.e. résoudre au sens des moindres carrés :

$$c \;+\; \xi_i\ d \quad = \quad \eta_i \qquad\qquad i = 1, ..., n$$

les inconnues sont ici c et d.

a) écrire un système linéaire $\quad B\, x \;=\; f$
avec B $\;n$ lignes, 2 colones
$\quad x$ $\;2$ lignes
$\quad f$ $\;n$ lignes.

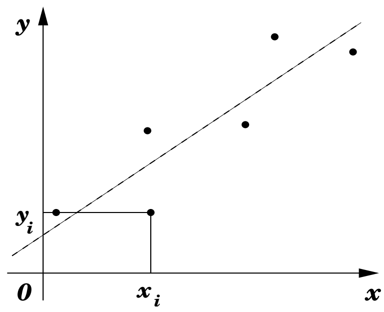


FIG. 1.2 – Lissage par une droite : droite des moindres carrés

b) trouver x_* au sens des moindres carrés (les coefficients c et d).
c) vérifier que $c + \bar{\xi}\, d \;=\; \bar{\eta}$ avec $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$ moyennes de $(\bar{\xi}_i)$ et $(\bar{\eta}_i)$.
d) d peut s'interpreter comme une covariance si l'on considère ξ_i et η_i comme des variables aléatoires équiprobables ; comment s'appelle cette droite en probabilités- statistiques ?

1.3.3 Projection et résolubilité

Reprenons les notations du paragraphe précédent, en se rappelant que $B\,x_*$ est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{F}$: $Pf = B\,x_*$ avec

$$^tB \;\; B \;\; x_* \quad = \quad {}^tB \;\; f$$

On a donc :

Proposition 1.5. *i) La projection $P : E \longrightarrow \mathcal{F} = \{B\,x, x \in I\!\!R^m\}$ est donnée par $Pf = B({}^tBB)^{-1}\;{}^tBf$ la matrice de P est $B({}^tBB)^{-1}\;{}^tB$ on a $\left({}^tf - Pf\right)Pf = 0$*
ii) On vérifie $P^2 = P$ et ${}^tP = P$ donc P est aussi orthogonale.

Attention : On a vu (exercice 1.8) que comme les colonnes de B sont indépendantes ${}^tB\,B$ est définie positive donc inversible ; $({}^tB\,B)^{-1}$ a bien un sens ; mais B n'est pas inversible : cela n'a pas de sens car c'est une matrice rectangulaire !

Cas particulier fondamental : projection sur une droite parametrée ; soit $b \in I\!\!R^n$ $\quad \mathcal{D} = \{y \in I\!\!R^n / \exists x \in I\!\!R,\; y = xb\}$
${}^tB\,B = {}^tb\,b \in I\!\!R\,, \quad Pf = \dfrac{b\,{}^tb\,f}{{}^tb\,b}$
noter que cette projection est invariante quand on multiplie b par un scalaire, on a donc avec $u = \dfrac{b}{({}^tb\,b)^{1/2}}$, $P\,f = u\,{}^tu\,f$
géométriquement ${}^tu\,f = \|f\|\,cos\,\theta$ avec θ angle entre u et f si bien que $P\,f = \;cos\,\theta\,\|f\|\,u$ est la formule bien connue de la projection sur une droite de vecteur unitaire u.
On retrouve aussi que $d(f, \mathcal{D}) = {}^t(f - P\,f)(f - P\,f)$ comme ${}^t(f - P\,f)P\,f = 0$ on a :

$$\begin{aligned} d(f, \mathcal{D}) &= {}^t(f - P\,f)f = {}^t(f - u\,{}^tu\,f)f \\ &= {}^tf\,f - {}^tf\,u\,{}^tu\,f \\ &= {}^tf\,f - {}^t(P\,f)\,P\,f \end{aligned}$$

ceci n'est autre que le théorème de Pythagore !

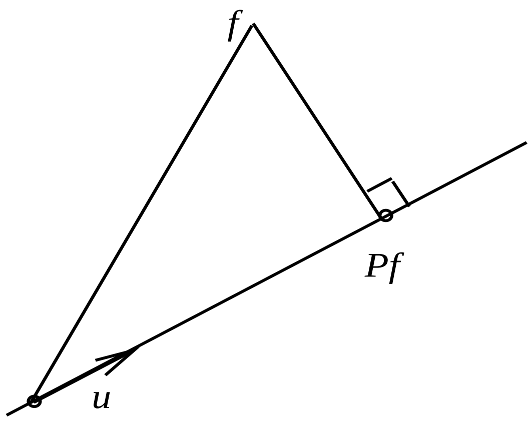


Fig. 1.3 – Distance (Pythagore)

Lemme 3. *: $I\!R^n$ se décompose en une somme directe orthogonale de $\mathcal{F} = Im\,B = Im\,P$ et de $Ker\,B = Ker\,P$; en pratique si $f \in I\!R^n$*

$$f = Bx_* + (f - Bx_*) \qquad avec \quad \left\{ \begin{array}{l} f - Bx_* \in Ker\,{}^tB \quad ou \\ {}^tB\,Bx_* - {}^tB\,f = 0 \end{array} \right.$$

Bx_* et $f - Bx_*$ sont orthogonaux et cette écriture est unique :
si $f = b + n$ avec $b \in Im\,B$ et $n \in Ker\,{}^tB$, alors $b = Bx_*$ avec ${}^tB\,Bx_* - {}^tB\,f = 0$ et $n = f - Bx_*$.

En effet avec la proposition 1.2. $f - Bx_* \in Ker\,{}^tB$; d'autre part si $y \in Im\,B$ et $z \in Ker\,{}^tB$: $y = Bx$ et ${}^ty\,z = {}^tx\,{}^tB\,z = 0$ ce qui montre l'orthogonalité ; il reste juste à vérifier que $Im\,B \cap Ker\,{}^tB = \{0\}$ en effet si $y = Bx$ et ${}^tB\,y = 0$ alors ${}^ty\,y = {}^tx\,B\,y = 0$ ■

Ce corollaire est très important en pratique sous la forme suivante.

1.4 Systèmes surdéterminés

Le résultat suivant est indispensable pour l'étude des conditions d'ptimalité en présence de contraintes (voir chapitre suivant). On pourait montrer par des techniques d'optimisation mais on se reportera au cours d'algèbre linéaire (ou on admettra) :

Proposition 1.6. *Soit le système linéaire surdéterminé $Bx = f$ avec B à n lignes et m colonnes indépendantes avec $n \geq m$, $f \in I\!R^n$ et $x \in I\!R^m$; ce système est soluble si et seulement si :*
$\forall\ y \quad {}^ty\ B = 0 \implies {}^ty\ f = 0$
(ce qui signifie $f \in (Ker\ {}^tB)^\perp$)
en d'autres termes :
le système est soluble (ou $f \in Im\,B$) si et seulement si $f \in (Ker\ {}^tB)^\perp$ ou encore $Im\,B = (Ker\ {}^tB)^\perp$

Cas particulier : $B = A_\lambda = A - \lambda I$ avec A matrice carée ; quand λ est valeur propre de A , la condition ${}^ty\,A_\lambda = 0$ signifie y vecteur propre à gauche de A_λ ou vecteur propre de ${}^t\,A_\lambda$, on a donc :

Lemme 4. *Soit A matrice inversible, λ valeur propre de A $(A - \lambda\,I)x = f$ ce système est soluble si et seulement si b est orthogonal au sous- espace propre de ${}^tA - \lambda\,I$.*

Remarque 1.3. *En dimension infinie, ce résultat est connu sous le nom d'alternative de Fredholm .*

1.5 Minimisation dans $I\!R^n$

1.5.1 Introduction .

Ce paragraphe vise à étendre le résultat de base de la proposition 1.1. à des fonctions plus générales ; cela n'est pas aisé ; tant que l'on ne s'intéresse qu'à un résultat d'existence, l'hypothèse suivante est commode :

$H\,1 \quad \lim_{\|x\| \to +\infty} J(x) \;=\; +\infty$ parfois appelée coercitivité

de J car la fonctionelle quadratique a cette propriètè quand la forme bilinéaire est coercitive.
L'obtention d'une condition nécessaire d'optimalité demande seulement que la fonction soit différentiable.
Cela se complique beaucoup si l'on souhaite une condition nécessaire et suffisante : en effet le Hesien positif est une C.N.O. mais pas vraiment suffisante ; le Hessien défini positif est suffisant mais pas nécessaire ; il est facile de le voir en une variable.
La fonction $f_1(x) = x^3$ satisfait $f'(0) = 0 \;\; f''(0) = 0$ a-t-on envie de dire que

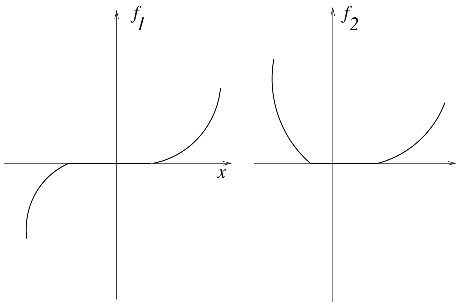


FIG. 1.4 – fonctions avec $f''(0) = 0$

zéro est un minimum local ?

$f_2(x) = x^4$
Dans le cas $f'(0) = 0 \;\; f''(0) = 0$ et *zéro* est un minimum absolu bien que $f''(0)$ ne soit pas strictement positif.

Mais le pire n'est pas là, considérons cette fonction g avec plusieurs minimums locaux, en tous ces minimums $f'(x_{i*}) = 0 \quad x_{i*}$ et $f''(x_{i*}) > 0$ et l'on voudrait bien caractériser le meilleur minimum absolu et disposer d'algorithmes de calcul.
Ces questions ne sont pas passées inaperçues dès les débuts des algorithmes d'optimisation (années 60) mais ne se sont vraiment développées que dans les années 80 ; les applications à l'art de l'ingénieur démarrent et sont prometeuses (Arora et al [1] (1995)) ; pourquoi ce changement de perspectives : on commence à disposer de moyens de calculs suffisants pour analyser à faible coût de grands

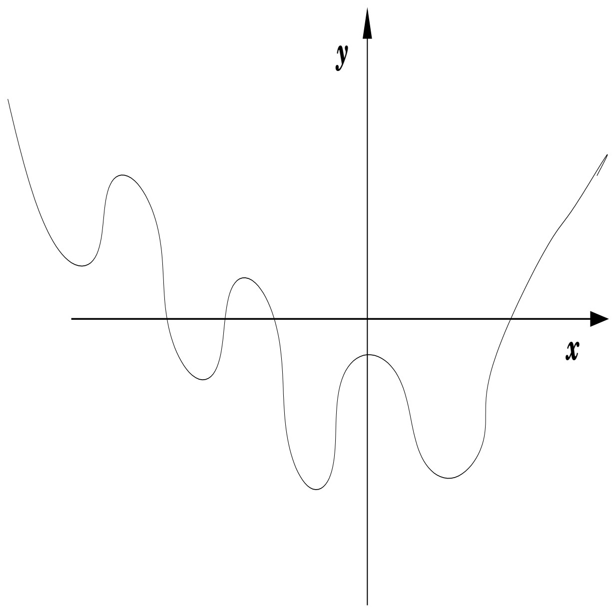


Fig. 1.5 – fonction avec plusieurs minimums locaux

systèmes ; or la détermination numérique d'un minimum demande d'analyser de très nombreuses fois le système à optimiser.

1.5.2 Rappel de calcul différentiel

Nous allons avoir besoin de dérivée seconde de fonctions de plusieurs variables ; c'est une fonction de 2 variables vectorielles

Définition 1.3. *J est dite deux fois dérivable au sens de Gateau si la*

$$\lim_{t\to 0} \frac{J'(x+tz,y) - J'(x,y)}{t}$$

existe et on la note $J''(x;y,z)$.

Définition 1.4. *Elle est dite deux fois dérivable au sens de Fréchet s'il existe une forme bilinéaire $(y,z) \longmapsto J''(x)(y,z)$ telle que*

$$\lim_{\|z\|\to 0} \frac{\|J'(x+z)y - J'(x)y - J''(x)(y,z)\|}{\|z\|} \;=\; 0$$

cette forme bilinéaire s'appelle souvent le Hessien et en notation matricielle on utilise
la matrice hessienne H : $J''(x)(y,z) = {}^t z\, H(x)\, y$

Proposition 1.7. *:* **Formule de Taylor à l'ordre 2 (suffisante pour nos applications)**
Pour J 2 fois continuement différentiable dans un ouvert contenant $[x,y]$:
1) $J(x+y) = J(x) + J'(x)y + \frac{1}{2}J''(x;y,y) + o(\|y\|^2)$
2) $J(x+y) = J(x) + J'(x)y + \int_0^1 (1-t)J''(x+ty;y,y)dt$

Démonstration 1) La première formule n'est qu'un cas particulier très utile du 2) obtenu en approchant $J''(x+ty)$ par $J''(x)$ et $\int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2}$!
2) la formule 2) se déduit de la formule de Taylor en une variable en posant $f(t) = J(x+ty)$
$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t)f''(t)dt$
(cette dernière formule résulte de 2 intégrations par parties)

Polynômes quadratiques Dans ce cas la formule de Taylor à lrdre 2 est exacte :

$$P(x+y) = P(x) + P'(x;y) + \frac{1}{2}P''(x;y,y)$$

ou matriciellement :

$$^t(x+y)A(x+y) +^t (x+y)B + f = (^t xAx +^t xB + f) + 2\ ^t yAx +^t yB + \frac{1}{2} 2\ ^t yAy$$

1.5.3 Résultats de base

Définition 1.5. *Soit J une fonction à minimiser, $I = Inf\ J(x)$ (éventuellement $-\infty$) ; $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est dite minimisante quand $J(x_k) \longrightarrow I$*

Attention : I peut n'être pas atteint : par exemple $I = 0$ pour $f = e^{-x^2/2}$ mais la valeur 0 n'est atteinte pour aucune valeur de $x \in \mathbb{R}$.
Remarquons que par définition d'une borne inférieure, l'existence de suites minimisantes est banale ; considérons le cas où I est fini, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe x tel que $I \leq f(x) \leq I + \varepsilon$
il suffit de considèrer une suite $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ pour disposer d'une suite x_n telleque $f(x_n) \longrightarrow I$.
Toutefois, le comportement de la suite x_n n'est pas évident ; voici deux exemples.

a . $f(x) = e^{-x^2/2}$ $\quad I = 0$; si (x_n) est une suite minimisante $|x_n| \to +\infty$; le minimum n'est pas atteint ; mais f ne vérifie pas $H1$.

b . $f(x) = sin\ x$ $\quad I = -1$; si x_n est une suite minimisante, elle peut osciller au voisinage des points $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\ \ k \in \mathcal{Z}$; dans cet exemple il y a beaucoup de minimums absolus ; l'hypothèse $H1$ n'est pas vérifiée.

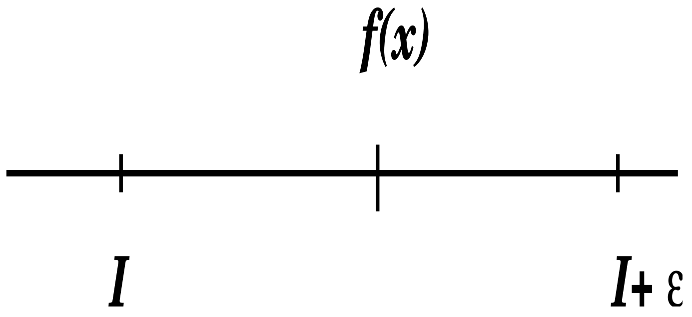


FIG. 1.6 – fonction f vérifiant l'hypothèse H_1

Hypothese 1. $(\mathbf{H_1})$ *sur la fonction J Pour toute suite x_k telle que $\|x_k\| \longrightarrow +\infty$, on a $J(x_k) \longrightarrow +\infty$. .*

Lemme 1.1. *Sous l'hypothèse $H\,1$, une suite minimisante (x_k) est bornée.*

Ce résultat très simple déroute souvent les étudiants, pourtant il suffit de raisonner par la contraposée : si la suite (x_k) n'est pas bornée on peut en extraire une sous- suite $x_{k'}$ telle que $\|x_{k'}\| \longrightarrow +\infty$ mais $H\,1$ entraîne $J(x_{k'}) \longrightarrow +\infty$; ceci est la négation de l'hypothèse $J(x_{k'}) \longrightarrow I$
(sauf bien sûr si J était toujours égale à $+\infty$, situation pathologique exclue de facto) ■

Proposition 1.8. *Soit $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, continue*
i) Si J satisfait l'hypothèse $H\,1$ alors J atteint son minimum en au moins un point x_*.
ii) Si J est différentiable, x_* vérifie $J'(x_*) = 0$
iii) Si J est deux fois différentiable, x_* vérifie de plus $\forall y \in \mathbb{R}^n \;\; {}^t y\, H(x_*)\, y \geq 0$ où H est le Hessien de J.
iv) Si $J'(x_0) = 0$ et $H(x_0)$ est défini positif, alors x_0 est un minimum local isolé.

Démonstration i) Je vais illustrer pour ce point, l'utilisation de la technique de la suite minimisante.
Soit $I = Inf_{x \in \mathbb{R}^n} J(x)$ ce nombre peut être $-\infty$ et n'est peut être pas atteint !

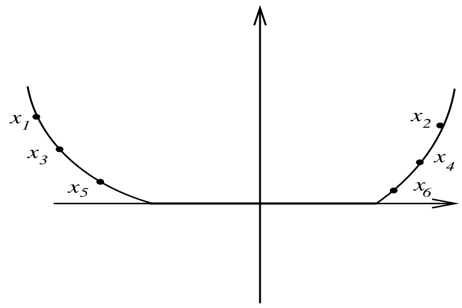
Par définition d'une borne inférieure, il existe une suite x_k tel que $J(x_k) \longrightarrow I$; quitte à en extraire une sous- suite on pourrait supposer que la suite $J(x_k)$ est décroissante d'où le nom de la technique.
Avec le lemme 1.1, la suite est bornée.

Pour achever la démonstration du i) il suffit d'utiliser le résultat classique :
" *De toute suite bornée (x_k) de $\mathbb{R}^n$ on peut extraire une sous- suite convergente*

$(x_{k'})$ " . Ceci n'est qu'une formulation commode de la compacité des parties fermées, bornées de $I\!R^n$.

Par suite $x_{k'} \longrightarrow x_*$ et comme J est continue $J(x_{k'}) \longrightarrow J(x_*)$ qui est donc égale à $I = lim\, J(x_n)$; le minimum est donc bien atteint au point x_*.

Noter que sans hypothèse supplémentaire la suite (x_k) peut ne pas converger ainsi qu'on le voit sur la figure.



ii)
La démonstration est analogue au i) de la proposition 1.1.
iii) la formule de Taylor donne comme $J'(x_*) = 0$

$J(x_* + \rho y) - J(x_*) = \dfrac{1}{2}\rho^2\, {}^t y\, H(x_*)\, y + o(\rho^2)$

et donc comme $J(x_* + \rho y) \geq J(x_*)$ en faisant tendre $\rho \to 0$, on trouve pour tout $y \in I\!R^n \quad {}^t y\, H(x_*)\, y \geq 0$

iv) La formule de Taylor donne encore avec $J'(x_0) = 0$

$J(x_0 + y) - J(x_0) = \dfrac{1}{2}\, {}^t y\, H(x_0)\, y + o(\|y\|^2)$

et donc comme ${}^t y\, H(x_*)\, y \geq \alpha\, \|y\|^2$

$J(x_0 + y) - J(x_0) > 0$ pour y assez petit ce qui montre que x_0 est un minimum local isolé (la fonction ne peut pas présenter de "plateau " au voisinage de x_0).

■

1.5.4 Convexité, ellipticité

La convexité (voir le cours d'analyse pour les propriétés) est un cadre naturel pour la minimisation de fonctions de plusieurs variables ; nous utiliserons une classe plus réduite de fonctions pour lesquelles des démonstrations sont un peu moins techniques : fonctions elliptiques (notions différente de celle des fonctions elliptiques de l'analyse classique) ou α-convexes.

Proposition 1.9. *La premire propriété définit les fonctions elliptiques ; cette premire condition est impliquée par les autres ; sous hypothèse de différentiabilité, la première condition entraine les 2 suivantes ; enfin pour les fonctions 2 fois différentiables, toutes les conditions sont équivalentes. l'une des conditions équivalentes suivantes avec $\alpha > 0$:*

1. $\forall u \in \mathbf{R^n}, \forall v \in \mathbf{R^n}, \forall \delta \in [0,1]$:
$J((1-\delta)u+\delta v) \leq (1-\delta)J(u)+\delta J(v) - \frac{\alpha}{2}\delta(1-\delta)\|u-v\|^2_{R^n}$

2. *si* J *est différentiable,* $\forall u \in \mathbf{R^n}, \forall v \in \mathbf{R^n}, J(v) \geq J(u)+J'(u)(v-u)+\frac{\alpha}{2}\|u-v\|^2_{R^n}$

3. *si* J *est différentiable,* $\forall u \in \mathbf{R^n}, \forall v \in \mathbf{R^n}, (J'(v)-J'(u), v-u) \geq \alpha\|u-v\|^2_{R^n}$

4. *si* J *est 2 fois différentiable,* $\forall u \in \mathbf{R^n}, \forall w \in \mathbf{R^n}, J''(u)(w,w) \geq \alpha\|w\|^2_{R^n}$

Montrons que la deuxème condition implique la troisième :

$$J(v) \geq J(u)+J'(u)(v-u)+\frac{\alpha}{2}\|u-v\|^2_{R^n} J(u) \geq J(v)+J'(v)(u-v)+\frac{\alpha}{2}\|u-v\|^2_{R^n}$$

d'où la troisème condition en additionant.

Réciproquement, introduisons, $j(t) = J(u+\delta(v-u))$, on a : $j'(t) = J'(u+\delta(v-u))(v-u)$, donc la troisème condition donne : $j'(t)-j'(0) \geq \alpha t\|u-v\|^2_{R^n}$ d'où la deuxième condition en intégrant de 0 à 1.

Proposition 1.10. *Une fonction elliptique (différentiable pour simplifier) atteint son minimum en un unique point.*

En effet avec la condition (2) de la proposition précédente, si $\|v_n\| \longrightarrow +\infty$, on voit que $J(v_n) \longrightarrow +\infty$; J vérifie donc l'hypothse H_1 et avec la proposition 1.8, on a l'existence d'un minimum. Pour l'unicité, considérons deux minimum, u_*, v_*, alors la propriété 3 de la proposition précédente donne : $J'(v_*) - J'(u_*), v_* - u_*) \geq \alpha\|u_* - v_*\|^2_{R^n}$, comme $J'(v_*) = 0 = J'(u_*)$, on doit avoir $u_* = v_*$.

1.6 Algorithmes pour l'optimisation sans contraintes...

Notons que pour le cas quadratique, un algorithme de résolution de systèmes linéaires convient : par exemple Choleski ou une méthode de relaxation ; le gradient conjugué est bien adapté aux grandes matrices creuses issues des éléments finis.

Pour une fonctionnelle non quadratique, l'algorithme du gradient a l'avantage de la simplicité et l'inconvénient de la lenteur ; l'algorithme de Newton (*voir propriétés dans la section sur la programmation quadratique séquentielle*) demande peu d'itérations mais demande le calcul de dérivées secondes ; la mise en oeuvre de ce calcul peut être bien simplifiée par l'utilisation de calcul symbolique (par exemple, Maple) ou de différentiation automatique de programme fortran (exemple Odysee, Adifor). Un algorithme de quasi-newton peut être un compromis car il utilise seulement des dérivées premières.

1.6.1 Algorithme du gradient

Encore appelé algorithme de la plus grande pente pour minimiser une fonction $J : I\!R^n \longrightarrow I\!R$, $x^{k+1} = x^k - \rho^k gradJ(x^k)$ où $\rho \in I\!R$ est à choisir par un algorithme de minimisation dans $I\!R$.

Pour simplifier l'analyse, supposons que ρ^k réalise le minimum de

$$j(\rho) = J(x^k - \rho gradJ(x^k))$$

; pour insister sur ce choix considérons

$j(\rho) = J(x^k - \rho w^k)$

Lemme 5. *1. Pour $x^{k+1} = x^k - \rho w^k$, si ρ est optimal (réalise le minimum de $j(\rho)$), on a*

$$(gradJ(x^{k+1}), x^{k+1} - x^k) = 0$$

2. si $w^k = gradJ(x^k)$, on a

(a) $(gradJ(x^{k+1}), gradJ(x^k)) = 0$;

(b) $\|gradJ(x^k)\| \leq \|gradJ(x^k) - gradJ(x^{k+1})\|$ et $\|gradJ(x^{k+1})\| \leq \|gradJ(x^k) - gradJ(x^{k+1})\|$

Exercice 1.12. *Dessiner une itération de l'algorithme à l'aide de courbes de niveaux pour minimiser une fonction de 2 variables.*

Proposition 1.11. *Soit $J : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ avec J elliptique de constante α et J' uniformément continue sur les compacts , la méthode du gradient à pas optimal converge et on a :*

$\|x^k - x^*\| \leq \frac{1}{\alpha}\|gradJ(x^k)\|$

La démonstration peut de faire en plusieurs étapes.

étape1 : Comme J est elliptique son minimum est atteint ; par suite $J(x^k)$ est minorée et décroissante donc convergente.

étape2 : avec ellipticité :

$$J(x^k) - J(x^{k+1}) \geq (gradJ(x^{k+1}), x^{k+1} - x^k) + \frac{\alpha}{2}\|x^k - x^{k+1}\|^2$$

avec le lemme le premier terme de droite est nul et donc $\|x^k - x^{k+1}\| \longrightarrow 0$

étape3 : comme $J(x^k)$ est décroissante et J coercitive (car elliptique x^k reste dans un borné (lemme ...) et avec uniforme continuité de J' : $\|gradJ(x^k) - gradJ(x^{k+1})\| \longrightarrow 0$ et donc $\|gradJ(x^k)\| \longrightarrow 0$ avec le lemme.

étape4 : l'ellipticité fournit encore :

$(gradJ(x^k) - gradJ(x^*), x^k - x^*) \geq \alpha\|x^k - x^*\|^2$ d'où la majoration du lemme.

Remarque 1.4. *1. Il suffit de supposer que J est 2 fois continument différentiable pour avoir l'uniforme continuité de J' sur les bornés.*

2. En pratique, on ne peut avoir précisement le pas optimal

Proposition 1.12. *Soit $J : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ avec J elliptique et avec*

$\|gradJ(x) - gradJ(y)\| \leq M\|x - y\|$, alors pour $0 < a \leq \rho^k \leq b < \frac{2\alpha}{M^2}$, l'algorithme du gradient converge géométriquement : $\|x^{k+1} - x^*\| \leq \beta\|x^k - x^*\|$ avec $\beta < 1$

Exercice 1.13. *Démontrer la proposition*

Exercice 1.14. *Dans le cas où J est quadratique*

1. *Préciser l'algorithme du gradient.*
2. *Ecrire l'algorithme dans la base de vecteurs propres de A.*
3. *pour A définie positive en déduire que le meilleur choix de ρ est $\rho^* = \frac{2}{\lambda_n+\lambda_1}$ et que le taux de convergence $\tau = \frac{\lambda_n-\lambda_1}{\lambda_n+\lambda_1}$*
4. *Dans quel cas l'algorithme est très lent ?*
5. *Ce choix est tout à fait théorique pourquoi ?*

Exercice 1.15. *Faire un changement de variable $x = C\xi$; que devient l'algorithme du gradient ? Cas quadratique. Interet du changement ?*
cette idée très simple est très efficace si l'on sait construire une matrice telle que les valeurs propresles plus petites et les plus grandes soient plus proches : on parle de preconditionement

1.7 Mise en oeuvre d'algorithmes

Quand on cherche calculer le maximum d'une suite x_k, il est inutile de stocker tous les termes de la suite.

```
kmax=10
x=[3.;2.]; m=x'*x;
for k=1:kmax
x1=sin(x)+1+x
m=max(m, x1'*x1)
x=x1;
end
```

Exercices Deug Mass Rousselet

Exercice 1 On considère la courbe d'équation implicite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.5}$$

1. En donner une représentation l'aide de fonctions $x \longmapsto y$; différentiabilité.
2. Représentation graphique. Discuter suivant valeurs de a, b. Comment s'appellent ces courbes ?
3. En donner une représentation paramétrique : $t \longmapsto \binom{x}{y}$
4. Déterminer un vecteur tangent cette courbe définie par des 2 dernières représentations.
5. Calculer la differentielle de $(x, y) \longmapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
6. En déduire le vecteur normal cette mme courbe.

Exercice 2 On considère la courbe d'équation implicite

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.6}$$

Mmes questions que ci-dessus. De plus :

1. Déterminer les asymptotes
2. Donner une équation de cette courbe rapportée ses asymtotes.

Exercice 3 On considère la conique d'équation définie par :

$$p(x, y) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{1.7}$$

On considre les 2 exemples :

$$p(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2 - x + 2 \tag{1.8}$$

$$p(x, y) = x^2 - xy + y^2 \tag{1.9}$$

1. Donner les équations qui founissent les point extrémaux de p ; quelle condition le point ext˚emal x_0 $x_1$est-il unique ? (encore appellé centre de la conique). *Dans la suite on se place dans ce cas.*
2. Donner l'équation de la conique dans un système d'axes parallèle et passant par le centre de la conique ($x = x_0 + X,\ y = y_0 + Y$) ; la mettre sous la forme $q(X, Y) + f' = 0$ avec q forme quadratique dont on donnera la matrice.
3. Interpréter pour retrouver que seuls les monômes de degés 2 interviennent dans la nature du point extrémal.
4. On appelle $\phi(x, y; x', y')$ la forme bilinéaire telle que : $\phi(x, y; x, y) = q(x, y)$; écriture matricielle.
5. On considère deux vecteurs (ou directions de droites) conjuguées par rapport la forme quadratique q : $\phi(\alpha, \beta; \alpha', \beta') = 0$; donner un choix possible de ces vecteurs.
6. Interprétation gé ométrique de vecteurs conjugués (considérer la différentielle de q.)
7. On considère le repère de mme origine et associè 2 vecteurs conjugués par rapport la forme quadratique ; donner l'équation de la conique. Interpré ter la nature de la courbe (ellipse ou hyperbole).

Chapitre 2

Minimisation avec contraintes

2.1 Minimisation avec contraintes d'égalités linéaires

Comme dans le cas sans contraintes, nous considérons d'abord le cas le plus simple :
les contraintes sont de la forme ${}^t b_j\, v = c_j$ où $b_j \in I\!R^n \quad j = 1, \cdots, m\,, \quad c_j \in I\!R$.
D'une part l'obtention des conditions d'optimalité avec multiplicateur de Lagrange est facile à partir de la proposition 1.6 ; d'autre part cette situation peut être considérée comme un intermédiaire algorithmique : la minimisation d'une fonction quadratique avec contraintes d'égalités linéaires peut servir à minimiser la même fonction avec des contraintes d'inégalités linéaires ; ce dernier problème pouvant être utilisé séquentiellement pour approcher un problème général de programmation mathématique : programmation quadratique séquentielle (voir §2.4).
Le mot contraintes est fréquent en optimisation ; en analyse mathématique c'est la situation de minimisation dans une partie K d'un espace vectoriel. Il convient de ne pas confondre le sens du mot contrainte en optimisation avec les contraintes mécaniques ; dans ce dernier sens les Belges parlent de tension ; en anglais on parle de "constraint" en optimisation et de "stress " en mécanique.
Nous considérons donc le problème :
$(C.L.E)$ Minimiser $J : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ dans l'ensemble $K = \left\{v |\, {}^t b_j\, v = c_j \;\; j = 1, \cdots, m\right\}$
où $b_j \in I\!R^n \quad c_j \in I\!R$.
ou encore $K = \left\{v |\, {}^t B\ v = c\right\}$ où les colonnes de la matrice B sont les vecteurs b_j :

$$B = [b_1 \,|\, b_2 \,\cdots\, |\, b_m] \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}.$$

Le théorème ci-dessous étend le (i) et (ii) de la proposition 1.8, au cas avec contraintes linéaires ; cette condition n'est pas suffisante (voir plus loin).

Théorème 2.1. *: Soit le problème (C.L.E) avec J continue, et les b_j sont supposés* **linéairement indépendants**.
(i) Si J tend vers l'infini quand $\|v\| \longrightarrow +\infty$ dans K fermé ou si K est fermé, borné alors J atteint son minimum (ou maximum) en au moins un point $v^* \in K$.
(ii) Si J est différentiable et si J atteint son minimum en $v^* \in K$, alors il existe $\lambda_j^* \in \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, m$ (des multiplicateurs de Lagrange) tels que on ait la C.N.O.(condition nécessaire d'optimalité)

$$grad\, J(v^*) \ + \ \sum \lambda_j^*\, b_j \ = \ 0 \qquad \textit{ou de façon équivalente}$$

$$grad\, J(v^*) \ + \ B\,\lambda^* \ = \ 0 \quad \textit{avec} \ \lambda^* = \begin{bmatrix} \lambda_1^* \\ \vdots \\ \lambda_m^* \end{bmatrix} \qquad B = [b_1|b_2 \cdots |b_m]$$

$$\textit{ou encore} \quad J'(v^*) \ + \ {}^t\lambda^*\, {}^tB \ = \ 0$$

En pratique, il est commode d'introduire le *Lagrangien* $L(v, \lambda) = J(v) \ + \ {}^t\lambda({}^tB\,v \ - \ C)$ la C.N.O. s'écrit alors $\dfrac{\partial\, L}{\partial\, v}(v^*, \lambda^*) = 0$ sans oublier la contrainte ${}^tB\,v - C \ = \ 0$ qui n'est autre que $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(v^*, \lambda^*) = 0$.

Démonstration

(i) Comme dans le cas sans contrainte de la proposition 1.8 avec la technique de la suite minimisante, et en utilisant la compacité des fermés, bornés de $\mathbb{R}^n$: $v^* \in K$ puisque K est fermé.
(ii) Pour obtenir la C.N.O. , comme dans le cas sans contrainte on part de $J(v^* + \rho\, w) - J(v^*) \geq 0$ mais ici on doit avoir $v^* \in K$ et $v^* + \rho\, w \in K$ i.e. ${}^tb_j(v^* + \rho\, w) = c_j$ et donc ${}^tb_j\, w \ = \ 0$.
Posons donc $K_T = \{w \in \mathbb{R}^n \ / \ {}^tb_j\, w \ = \ 0\}$ (C'est le sous- espace vectoriel tangent à K d'où la notation !) ; comme K_T est un sous- espace vectoriel nous pouvons faire tendre $\rho \to 0$ par valeurs positives ou négatives et donc :

$$\frac{J(v^* + p\, w) - J(v^*)}{\rho} \ \geq \ 0 \qquad \text{pour} \qquad \rho \geq 0 \qquad \text{donne}$$

$J'(v^*, w) \geq 0$ tandis que $\rho \leq 0$ donne
$J'(v^*, w) \leq 0$ et donc $J'(v^*, w) \ = \ 0$.
Mais à la différence du cas sans contraintes, $J'(v^*, w)$ n'est nul que pour $w \in K_T$!
Remarquons que $K_T = Ker\, {}^tB$ et donc : $\forall w \in Ker\, {}^tB \quad {}^tw\, grad\, J(v^*) \ = \ 0$; avec la proposition 1.6 cela montre que le système $B\,\lambda \ = \ -\,grad\, J(v^*)$ est soluble, d'où l'existence de λ^* énoncé dans le théorème.

■

Cas Particulier : *J quadratique*
$J \ = \ \dfrac{1}{2}\, {}^tv\, A\, v \ - \ {}^tv\, F$
$grad\, J \ = \ A\, v \ - \ F$ et la C.N.O. devient :

$$\begin{cases} A\ v \ + \ B\ \lambda \ = \ F & \text{avec la contrainte} \\ {}^t\,B\ v \ = \ c & \end{cases} \tag{2.1}$$

Lemme 2.1. *Si il existe $\alpha > 0$, $\forall w \in K_T \qquad {}^t w\, A\, w \geq \alpha \, \|w\|^2$, le système (2.1) admet une solution unique.*

Noter que A n'est pas nécessairement inversible mais que sa restriction à K_T est inversible.
Dans ce cas particulier on peut donner une démonstration directe.
En effet, il suffit de vérifier

$$\left\{ \begin{array}{l} A\ v\ +\ B\,\lambda\ =\ 0 \quad \text{donne une solution nulle} \\ {}^t\,B\ v\ =\ 0 \end{array} \right. \tag{2.2}$$

or la première équation donne ${}^t v\, A\, v\ +\ {}^t v\, B\, \lambda\ =\ 0$ et avec la dernière équation il reste ${}^t v\, A\, v = 0$ d'où $v = 0$ et $\lambda = 0$ en reportant dans la première équation.

Remarques sur le système (2.1)

(1) Dans le cas où A est inversible, on a $v = -A^{-1}\, B\,\lambda\ -\ A^{-1}\, F$ et la deuxième équation donne $-{}^t B\, A^{-1}\, B\,\lambda\ =\ c\ +\ A^{-1}\, F$; ce système permet de trouver λ. Cette méthode n'est pas conseillée numériquement mais est commode dans les petits exemples.
(2) De plus dans le cas $A = I$:
$v = -B\lambda\ +\ F$ et $\quad + {}^t B\, B\,\lambda = -c\ +\ {}^t B\, F$
donc $v = -B({}^t B\, B)^{-1}(-c\ +\ {}^t B\, F)\ +\ F$.

Remarque 2.1. *A noter que la situation du cas particulier est tres fréquente dans l'analyse par éléments finis de systèmes elliptiques d'équations aux dérivées partielles, en particulier en mécanique des structures élastiques.*

Exercice 2.1. $J(v) = \dfrac{1}{2}\|v - F\|^2$ *avec la contrainte* $v \in K = \left\{ {}^t Bv - c = 0 \right\}$
a) trouver explicitement v et λ.
b) comparer avec la projection sur un sous- espace paramétré.
c) cas où B a une seule colonne.
d) cas où B a des colonnes orthonormées.

Solution
a) $J(v) = {}^t v\, v - {}^t v\, F + {}^t F\, F$
c'est à dire $A = I$; on a donc la formule du 2) ci- dessus :
$v = -B\,({}^t B\, B)^{-1}\ {}^t B\, F\ +\ B\,({}^t B\, B)^{-1} c\ +\ F$

b) le premier terme $B\,({}^t B\, B)^{-1}\ {}^t B\, F$ n'est autre que la projection de F sur le sous- espace $\{v / \, v\ =\ B\, x \qquad x \in I\!R^m\}$ qui est orthogonal à K_T (voir proposition 1.5), le deuxième terme tient compte du fait que K ne passe pas par l'origine ; si l'on connait un $v_0 \in K \qquad c = {}^t B\, v_0)$ on peut écrire :
$v\ =\ -B\,({}^t B\, B)^{-1}\ {}^t B\,(F - v_0)\ +\ F$

c) Quand $B = b$ a une seule colonne $K = \{v / {}^t b\ v = c\}$ est un hyperplan affine ;

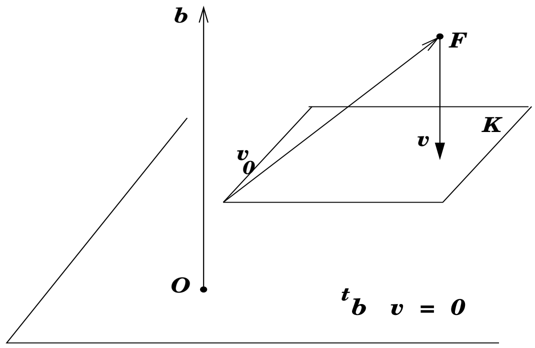


FIG. 2.1 – Projection sur un sous espace ${}^tbv - c = 0$

$-\dfrac{b\,{}^tb}{{}^tb\,b}(F - v_0)$ est la projection de $-(F - v_0)$ sur la droite portée par b ; ajouté à F cela ramène dans K (voir figure 2.1).

d) Dans le cas où ${}^tB\,B = I_{I\!R^m}$ on a :
$v \;=\; -B\,{}^tB(F - v_0) \,+\, F$ attention $B\,{}^tB \neq I_{I\!R^m}$

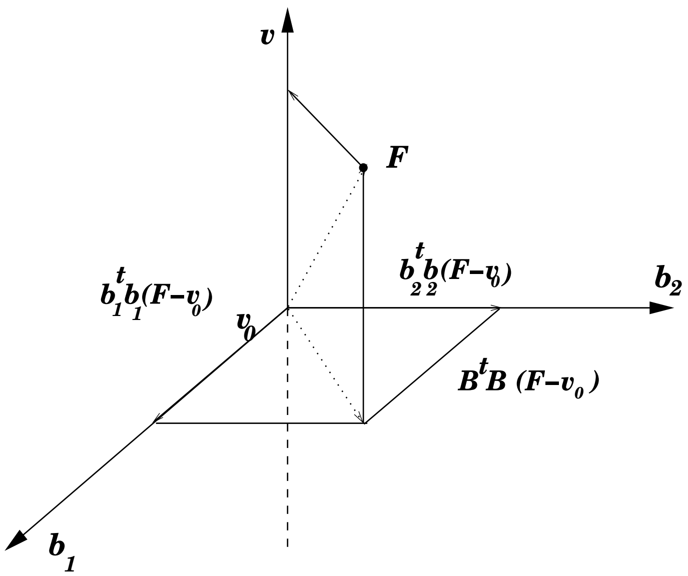


FIG. 2.2 – Cas où ${}^tB\,B \;=\; I_{I\!R^m}$

Remarque 2.2. *Il convient de réaliser intuitivement la C.N.O. à partir des courbes de niveau de J ; visualisons pour une fonction de deux variables x, y.*

La figure 2.3 représente les courbes de niveau de $(x, y) \longmapsto J(x, y)$; en l'abscence de contraintes, J atteint son minimum au point m autour duquel tournent les

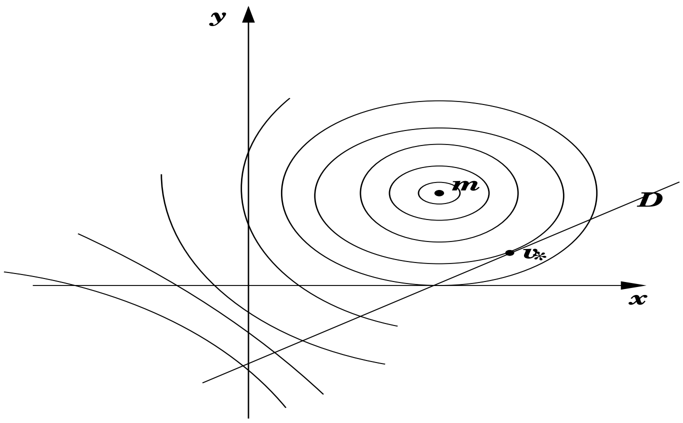


FIG. 2.3 – La C.N.O. à partir des courbes de niveau

courbes de niveau comme sur une carte géographique ; plus les ellipses sont grandes, plus grande est $J(x, y)$; on constate que lorsqu'on s'éloigne du point $v_* = (x_*, y_*)$ où D est tangent à une courbe de niveau, la fonction augmente ; c'est donc que (x_*, y_*) est un minimum local de J sur la droite D ! Or la normale à la courbe de niveau est $\nabla J(x_*, y_*)$; ce vecteur est donc colinéaire au vecteur b orthogonal à la droite ${}^t b\, v - c = 0$; ou $\nabla J(x_*, y_*) + \lambda b = 0$ ce qui n'est autre que la *C.N.O.* du théorème 2.1 avec une seule contrainte.

Voici quelques exercices pour lesquels on peut obtenir une solution explicite assez facilement ; le seul but est de manipuler la C.N.O. ; on dessinera les contraintes et les courbes de niveau.

Exercice 2.2. *Soit* $J(x, y) = x^2 + y^2$ *et* $K = \{(x, y) \mid 2x + y = 2\}$ *. Déterminer le minimum et le multiplicateur de Lagrange.*

Exercice 2.3. *Même question pour* $x \in \mathbb{R}^n$ $\quad J(x, y) = \dfrac{\|x\|^2}{2}$ *et* $K = \{x \mid {}^t b\, x - c = 0\}$

Exercice 2.4. $J(x, y) = \dfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ *et* $K = \{x \mid x_1 - x_2 - 1 = 0 \quad , \quad x_2 - x_3 - 2 = 0\}$

Exercice 2.5. *Projection de* $\beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *sur* $K = \{x \mid {}^t B\, x = 0\}$ *avec* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *;*
distance de f *à* K*.*

2.2 Fonction quadratique avec contraintes d'égalités linéaires

2.2.1 Introduction

Soit donc pour $v \in I\!R^n$ $\quad J(v) = \frac{1}{2} {}^t v\, A\, v \;-\; {}^t v\, f$ avec la contrainte

${}^t B\, v \;-\; c = 0$ où $\underbrace{\boxed{\;B\;}}_{m}\; n$ est une matrice à n lignes et m colonnes avec $m < n$, et la C.N.O.

$$\begin{cases} A\,v \;+\; B\,\lambda \;=\; f \\ {}^t B\,v \;\;\;\;\;\;\;\;\; =\; c \end{cases}$$

on a vu dans les petits exemples qu'il est commode de tirer v en fonction de λ de la première équation et de reporter cette expression dans la dernière équation, ce qui fournit un système pour déterminer λ :
$v = A^{-1}B\lambda + A^{-1}f$ d'où $-{}^t BA^{-1}B\lambda = c - {}^t BA^{-1}f$ ce qui permet de déterminer λ que l'on reporte ensuite pour trouver v.
Cette méthode peut être transformée en un algorithme numérique sous réserve que <u>A soit inversible</u> avec une décomposition de Cholesky de A puis de ${}^t BA^{-1}B$.

2.2.2 Elimination

Nous allons présenter une autre méthode qui s'applique même si A n'est pas inversible ; rappelons que cela n'empêche pas le système d'avoir une unique solution ; le problème de minimisation a également une solution dès que A est définie positive sur l'espace tangent aux contraintes (Lemme 2.1).
Il s'agit essentiellement d'une méthode d'élimination ; voyons cela d'abord avec une seule contrainte :
${}^t b\, v \;=\; c \quad$ si $\; b_i \neq 0 \qquad$ on peut tirer

$$v_1 \;=\; \frac{1}{b_1}\left[\; - \sum_{i=2}^{n} b_i\, v_i \quad + \quad c \;\right]$$

et reporter cela dans la $1^{\text{ère}}$ équation ; il est alors possible d'éliminer λ_1 : une façon indirecte de s'en convaincre est que l'on a paramétré les contraintes, on a donc un problème de minimisation sans contraintes ; avec une seule contrainte, la seule précaution est de vérifier que b n'est pas trop petit, sinon prendre un autre coefficient ; dans le cas de plusieurs contraintes il faut chercher une sous-matrice $m \times m$ dont le déterminant n'est pas trop petit.
Remarquons toutefois que cette transformation peut s'écrire :

$$v = s\,c \;+\; Z\,v^\flat \quad \text{avec} \quad s = \begin{bmatrix} \frac{1}{b_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v^\flat = \begin{bmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\text{et } Z = \begin{bmatrix} -\frac{b_2}{b_1} & \cdots & -\frac{b_m}{b_1} \\ 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Notons que l'on a banalement ${}^t s\, b = 1$ et que ${}^t b\, Z = 0$
c'est à dire que les colonnes de Z constituent une base de l'hyperplan ${}^t b\, w = 0$ pour $w \in \mathbb{R}^n$. L'algorithme ci-dessous est une généralisation de cette remarque.

2.2.3 Algorithmes d'élimination généralisée

En suivant Fletcher, 1981 [6] avec une présentation légérement différente, nous supposons que nous disposons de deux matrices S et Z

$$n \; \underset{m}{\boxed{\;S\;}} \; \underset{n-m}{\boxed{\quad Z \quad}} \; n \quad \text{telles que la matrice } \big[S\big|Z\big]$$

soit inversible et que ${}^t B\, S \;=\; I_{\mathbb{R}^m} \qquad {}^t B\, Z \;=\; 0$

Nous verrons au §2.2.4. une méthode possible pour construire S et Z.

Comme dans le cas d'un hyperplan, la deuxième condition, jointe à l'inversibilité de $\big[S\big|Z\big]$, signifie que *les colonnes* de Z constituent *une base du sous- espace vectoriel* ${}^t B\, w \;=\; 0$ avec $w \in \mathbb{R}^n$.
Quand à la première condition, elle s'explicite en ${}^t b_i\, s_j \;=\; \delta_{ij}$ avec $B = \big[b_1\big|\cdots\big|b_m\big]$ $S = \big[s_1\big|\cdots\big|s_m\big]$.
Cette condition rappelle celle de base duale du sous- espace vectoriel engendré par les b_i ; toutefois cela n'est le cas que si ${}^t s_j\, Z \;=\; 0$, ce qui n'est pas nécessairement le cas ; toutefois voir le §2.4. où nous verrons aussi comment construire pratiquement ces matrices.
L'idée est très simple tout comme au §2.2.2., ces matrices permettent de *paramétrer les contraintes :*

$$v \;=\; S\,c \;+\; Z\,y \qquad \text{avec} \quad y \in \mathbb{R}^{n-m} \qquad \text{si et seulement si} \quad {}^t B\, v \;=\; c \qquad (2.3)$$

En effet comme $[S|Z]$ est inversible, à tout v on peut associer x, y tels que : $v = [S|Z]\binom{x}{y}$

Nous avons dessiné, sur la figure 2.4 , le cas où ${}^t s_j\, z \;=\; 0 \quad j = 1,2$ avec $n = 3$, $m = 2$ dans ce cas Z se réduit à un seul vecteur ; $S\,c$ est alors l'intersection de la droite ${}^t B\, v = c$ et du plan ${}^t Z\, w = 0 \quad w \in \mathbb{R}^n$.

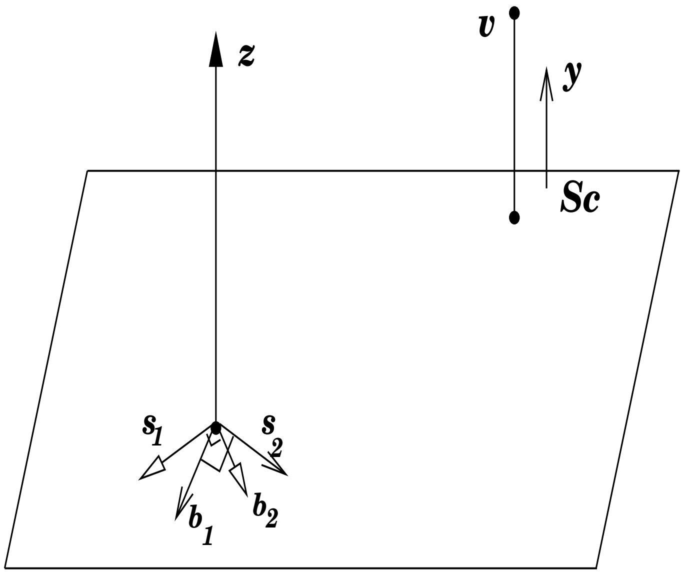


FIG. 2.4 – Cas où ${}^t s_j\, z \;=\; 0 \;\; ; \;\; j = 1,2$

Pour trouver la solution, il suffit donc de considérer
$A\,v \;+\; B\,\lambda \;=\; f$ qui s'écrit :
$A\,Z\,y \;+\; A\,S\,c \;+\; B\,\lambda \;=\; f$ et en multipliant par ${}^tZ$ on élimine λ :
${}^tZ\,A\,Z\,y \;=\; {}^tZf \;-\; {}^tZ\,A\,S\,c$
Ce système est soluble en y puisque A est définie positive sur le sous espace vectoriel $\{w \in \mathbb{R}^n / {}^tB\,w = 0\}$ et ce sous espace vectoriel est engendré par les colonnes de Z ! on peut donc utiliser l'algorithme de *Cholesky* pour calculer y.
On en déduit v avec (2.3) puis λ en multipliant
$A\,v \;+\; B\,\lambda = f$ par ${}^tS$: $\lambda \;=\; {}^tS\,f \;-\; {}^tS\,A\,v$.

2.2.4 Triangulation par des matrices orthogonales

Nous indiquons ici une méthode numériquement stable pour construire les matrices S et Z du paragraphe précédent. Pour cela nous supposons savoir construire une matrice Q orthogonale $n\times n$ et une matrice R triangulaire supérieure $m\times m$:

$$Q = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} Q_1 & Q_2 \end{array}\right] & n \\ \;\; m \quad n-m & \end{array} \quad \text{telles que} \quad B = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = [Q_1 \;\; Q_2]\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1\,R$$

Avec ces matrices si on suppose $S = Q_1{}^tR^{-1}$ on a bien ${}^tB\,S = I$ et $Z = Q_2$ satisfait ${}^tB\,Z = 0$ puisque ${}^tB\,Z = {}^tR\,{}^tQ_1\,Q_2$ et ce dernier produit est nul car comme Q est orthogonale, ses colonnes sont orthogonales entre elles !
Dans ce cas la matrice S satisfait de plus :

$${}^tS\;Z \;\;=\;\; 0$$

En effet ${}^tS\,Z = R^{-1\,t}Q_1\,Q_2 = 0$. Nous voyons que dans ce cas $s_1, \cdots, s_m$ constitue la base duale de $b_1, \cdots, b_m$ (dans le sous- espace vectoriel $\sum \lambda_i\, b_i$).
La figure 2.4 correspond donc à cette situation.

A noter que pour orthogonaliser on peut être tenter d'utiliser *la méthode de Gramm- Schmidt : elle est à éviter car elle n'est pas stable numériquement.*

Une bonne méthode numérique consiste à utiliser les *opérateurs de Householder* :

$$S(h)\,v \;=\; v - 2\frac{h\,{}^th\,v}{{}^th\,h} \qquad v, h \in I\!R^n. \tag{2.4}$$

On reconnaît en $\dfrac{h\,{}^th\,v}{{}^th\,h}$ la projection de v sur la droite engendrée par h ; voir figure 2.5

Exercice 2.6. *i) Pour $h \neq 0$ montrer que $S(\lambda\, h) = S(h)$ avec $\lambda \in I\!R$, $\lambda \neq 0$ montrer que $S(h)$ est l'opérateur de symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan ${}^th\,w = 0$.*
ii) montrer que $S(h)$ est un opérateur symétrique ${}^tS = S$ et orthogonal $S\,{}^tS = {}^tS\;S \;=\; I$ ce qui avec la symétrie se réduit à $S^2 = I$.
iii) Si $\|v\| = \|w\|$, montrer qu'il existe $h \in I\!R^n$ telque $w = S(h)\,v$.

<u>**Solution**</u> : i) $S(\lambda\, h) = S(h)$ est immédiat avec $\lambda \neq 0$.
Ceci revient à dire que la projection de v et de $S(h)\,v$ sur h sont opposées et ont même projection sur $\{w, {}^th\,w = 0\}$; prenons $\|h\| = 1$ or $S(h)\,v = v - 2h^th\,v$
${}^th\,S(h)\,v = {}^th\,v - 2^th\,v = -{}^th\,v$
donc la projection de $S(h)\,v$ sur h est $-h\,{}^th\,v$ est bien opposée à la projection de v.
D'autre part : la projection de v sur l'hyperplan ${}^th\,w = 0$
$P\,v = v - h\,{}^th\,v$
$P\,S(h)\,v \;=\; S(h)\,v - h\,{}^th\,S(h)\,v = v - 2h^th\,v + h^th\,v = v - h^th\,v = P\,v$
ii) simple calcul matriciel.
iii) l'interprétation avec la symétrie amène à prendre $h = w - v$; il faut alors calculer
$w - S(h)\,v \;=\; w - v + 2\dfrac{h\,{}^th\,v}{{}^th\,h} \;=\; \dfrac{h\,{}^th\,h + 2h\,{}^th\,v}{{}^th\,h} = \dfrac{h\,{}^th\,(h+2v)}{{}^th\,h}$
or $h + 2v = w + v$ donc ${}^th(h+2v) = {}^t(w-v)(w+v) = {}^tw\,w - {}^tv\,v$

■

A partir de ces propriétés il est facile de transformer un vecteur v en $\|v\|e_1$ où $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ soit h_1 telque $\|v\|e_1 = S(h_1)\,v$
si v est la première colonne de A : $S(h_1)\;\;A \;\;=\;\; A_1$ a pour première colonne $\begin{bmatrix} \|v\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ et donc $A = S(h_1)\,A_1$ d'où la possibilité de triangulariser à l'aide de

matrices orthogonales.
A noter que cette idée est à l'origine d'un bon algorithme de calcul de valeurs et de vecteur propres : la méthode $Q\,R$; voir par exemple Schatzman [9].

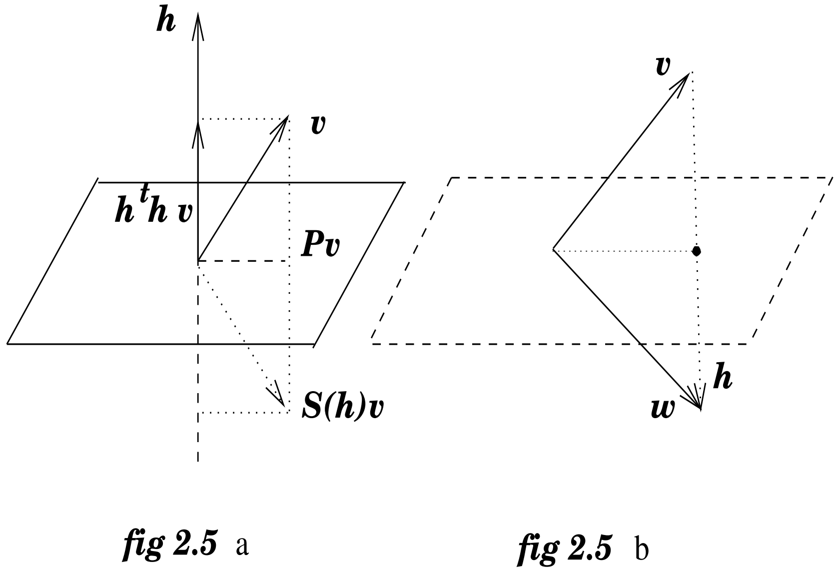


FIG. 2.5 – symétrie orthogonale

2.2.5 Programmation quadratique (par minimisation successive de fonctions quadratiques avec contraintes d'égalités)

Dans le cas d'une fonctionnelle quadratique avec des inégalités linéaires, on peut utiliser itérativement la minimisation de la fonctionnelle avec des contraintes d'égalité. considérons la minimisation de

$$J(v) = \frac{1}{2}{}^t vAv -{}^t vf$$

avec les contraintes ${}^tBv - c \leq 0$. Remarquons que

$$J(v + d) = q(d) + J(v)$$

avec

$$q(d) = \frac{1}{2}{}^t dAd +{}^t dAv -{}^t df$$

Algorithme :

1. Si le point initial $\tilde{v}^0$ n'est pas admissible, on peut le projeter sur l'ensemble défini par les contraintes d'égalités : ${}^tBv - c = 0$; on appelle v^0 cette projection ; attention si les colonnes de B ne sont pas indépendantes, il faut en retirer jusqu'à obtenir des colonnes indépendantes, ce qui permettra d'utiliser l'algorithme de décompostion QR de B.
2. A partir d'un point admissible v^0, **itérer pour k de** 0 **à** $iter_{max}$ **donné.**
   (a) – A la première itération, on détermine $sat(v^k)$, les indices pour lesquels ${}^tB^jv - c_j = 0$
   – Si des multiplicateurs négatifs sont apparus à l'iteration précédente, on prend $sat(v^k) = sat_{red}(v^{k-1})$;
   – sinon, on prend $sat(v^k) = sat_{aug}(v^{k-1})$
   (b) Minimiser $q(d)$ avec ${}^tB_jd = 0$ pour $j \in sat(v^k)$; soit d^k le minimum ;
   (c) Si $d^k = 0$ et si les multiplicateurs du problème avec égalités sont ≥ 0 on s'arrête ; on a obtenu le minimum
   (d) si des multiplicateurs sont négatifs, on retire le plus négatif, soit $sat_{red}(v^k)$ les nouveaux indices ; on minimise $q(d)$ avec ${}^tB_jd = 0$ pour $j \in sat_{red}(v^k)$
   (e) Si $d^k \neq 0$, posons : $\tilde{v}^{k+1} = v^k + d^k$; on distingue 2 cas :

   cas 1 Si $\tilde{v}^{k+1}$ satisfait les autres contraintes, J a diminué et on le prend comme nouveau point de départ $v^{k+1} = \tilde{v}^{k+1}$.

   cas 2 Si $\tilde{v}^{k+1}$ ne satisfait pas les autres contraintes,, on cherche ρ tel que le point $v^k + \rho d^k$ soit admissible ; on doit donc avoir

   $${}^tB_j(v + \rho d^k) - c_j \leq 0 \ ;$$

   comme ${}^tB_jd = 0$ pour $j \in sat(v^k)$ on trouve que

   $$\rho \leq \rho^* = Min\{\frac{c_j -{}^t B_jv}{{}^tB_jd} \ / \ j \notin sat(v^k), \ {}^tB_jd > 0\}$$

   On prend $\rho = min(1, \rho^*)$ et $v^{k+1} = v^k + \rho^* d^k$ et on rajoute dans les contraintes saturées celle que l'on vient d'atteindre avec le pas ρ^* : $sat_{aug}(v^k)$, et on recommence.

Fin de la boucle d' itération.

Cet algorithme peut dans des conditions exceptionnelles ne pas converger vers le minimum cherché.

Cependant, si l'on arrive à $d = 0$ avec des multiplicateurs positifs, on a : $Av - f + B_{sat}\lambda_{sat} = 0$ et ${}^tBv = c$; v satisfait donc les CNO du premier ordre ; si deplus A est défini positif, il satisfait aussi les condition suffisantes du deuxiéme ordre.

D'autre part quand d n'est pas nul, la fonctionnelle décroit à chaque itération.

2.3 Minimisation avec contraintes

2.3.1 Condition d'optimalité avec contraintes d'égalité

On souhaite obtenir une condition analogue à celle obtenue au théorème 2.1 dans lequel les contraintes sont supposées linéaires ${}^t b_j\ v\ =\ c_j$; si l'on reprend la démonstration de ce théorème on voit qu'un des ingrédients est que si v^* est minimum local $v^* + \rho w$ satisfait les contraintes si et seulement si ${}^t b_j\ w = 0$; cette caractérisation simple des directions admissibles w vient naturellement du caractère linéaire des contraintes.
Une façon d'adapter cette approche au cas de contraintes non linéaires $\mathcal{F}_j(v) = 0$ est de considérer des w^k tels que il existe ρ^k avec $v^* + \rho^k w^k$ admissible et de considérer les w qui sont limite de w^k quand $\rho^k \longrightarrow 0$; cette approche s'étend au cas avec contraintes d'inégalités et se trouve par exemple dans Fletcher [6] (1981).

Du point de vue géométrique cela rappelle la définition d'une tangente à une surface comme limite de sécantes.

Il nous paraît plus commode de caractériser les w admissibles comme les vecteurs tangents en v^*, aux courbes passant par v^* et satisfaisant les contraintes.

$K = \{v \in I\!R^n\ /\ \mathcal{F}_j(v) = 0; j = 1, \cdots, n\} \equiv \{v \in I\!R^n\ /\ \mathcal{F}(v) = 0\}$ où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\ :\ I\!R^n &\longrightarrow I\!R^m \\ v &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(v) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_m(v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Définition 2.1. *L'espace tangent en $v^* \in K$ est*

$$K_T(v^*) = \left\{ w = \frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} \in I\!R^n\ / v(0) = v^*, \exists\, \varepsilon > 0\ \ ,\ v \in \mathcal{C}^1(-\varepsilon, \varepsilon)\ ,\ v(t) \in K \right\}$$

On pourrait démontrer qu'il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel mais ce qui nous interésse ici est d'en donner une caractérisation à l'aide de la dérivée de $\mathcal{F}$; pour cela nous avons besoin d'une condition dite de régularité.

Définition 2.2. *$v^* \in K$ est dit régulier pour K si les $\mathcal{F}_j^{'}(v^*)$ sont des formes linéaires indépendantes (ou grad $\mathcal{F}_j(v) = {}^t\mathcal{F}_j^{'}(v^*)$ sont des vecteurs indépendants).*

Cette terminologie habituelle en optimisation correspond à ce que les géomètres appelent une submersion (voir par exemple Berger-Gostiaux [3] (1972), F. Pham [8]) ; le résultat suivant est classique.
(1992)

Théorème 2.2. *En un point régulier $v^* \in K$, on a $K_T(v^*) = K_G(v^*)$ avec*

$$K_G(v^*) = \{w \in I\!R^n\ \ , \mathcal{F}'(v^*)\ w\ =\ 0\}$$

ou de façon équivalente

$$K_G(v^*) = \{w \in I\!R^n \ \ , \mathcal{F}'_j(v^*)\ w \ = \ 0\ ;\ j = 1, ..., m\} \equiv \bigcap_{j=1,...m} Ker\ \mathcal{F}'_j(v^*)\ .$$

Démonstration :
Nous montrons d'abord que $K_T(v^*) \subset K_G(v^*)$;
soit $w \in K_T(v^*)$, il existe donc une courbe de $K \quad \{t \longmapsto v(t)\}$ telle que $v(0) = v^*$ et $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0}$; comme $\mathcal{F}(v(t)) = 0$ on en déduit par la dérivation de fonctions composées que : $\mathcal{F}'(v(t)\ \frac{dv}{dt} = 0$ et donc en $t = 0 \quad \mathcal{F}'(v^*)\ w = 0$.

Réciproquement, si $w \in K_G(v^*)$ nous devons construire une courbe située sur K au voisinage de v^* ; en s'appuyant sur l'intuition géométrique (voir figure 2.6) il est naturel de chercher cette courbe dans le sous-espace affine $v^* + \alpha w + \sum_{j=1}^{m} u_j\ grad\ \mathcal{F}_j(v^*)$

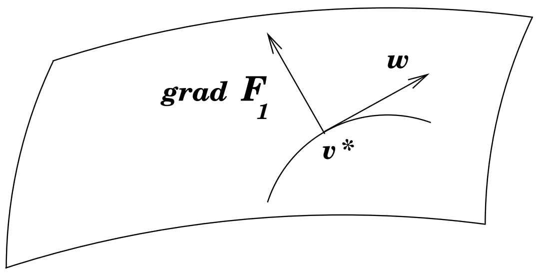


FIG. 2.6 – Courbe tangente

nous allons montrer que l'on peut trouver des fonctions $\alpha \longrightarrow u_j(\alpha)$ telles que au voisinage de $\alpha = 0$ celle courbe soit tangente à w ; nous cherchons donc $\alpha \longrightarrow u(\alpha)$ telque

$$\mathcal{F}(v^* + \alpha w + {}^t\mathcal{F}'(v^*)u(\alpha)) \ = \ 0 \ \ ;$$

nous sommes dans une situation de fonction implicite pour
$f(\alpha, u) = \mathcal{F}(v^* + \alpha w + {}^t\mathcal{F}'(v^*)u)$, on a

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0\,,u=0} \ = \ \mathcal{F}'(v^*)\ w \ \ = \ \ 0 \ (\text{car } w \in K_G(v^*))$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\alpha=0\,,u=0} \ = \ \mathcal{F}'(v^*)\ {}^t\mathcal{F}'(v^*)$$

Comme v^* est régulier les colonnes de $\mathcal{F}'(v^*)$ sont linéairement indépendantes, $\mathcal{F}'(v^*)\ {}^t\mathcal{F}'(v^*)$ est définie positive (exercice 1.8 du §1.1.) donc inversible ; le théorème des fonctions implicites (Pham [8]) assure donc l'existence au voisinage de zéro, d'une fonction $\alpha \longmapsto u(\alpha)$ telle que

$$f(\alpha, u(\alpha)) \ = \ 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{F}(v^* + \alpha w + {}^t\mathcal{F}'(v^*)u(\alpha)) \ = \ 0$$

et l'on a $\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{d\,u}{d\,\alpha} \ = \ -\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ en particulier en $\alpha = 0$

$$\mathcal{F}'(v^*)\ {}^t\mathcal{F}'(v^*)\ \left.\frac{d\,u}{d\,\alpha}\right|_{\alpha=0} \ = \ -\mathcal{F}'(v^*)\ w \ \ = \ \ 0 \qquad \text{car} \quad w \in K_G(v^*)\ ;$$

finalement la courbe
$\alpha \longmapsto v^* + \alpha w + {}^t\mathcal{F}'(v^*)\,u(\alpha)$ est tangente à w, situé sur K et passe par v^* .

■

Cette caractérisation de l'espace tangent va nous permettre d'obtenir une condition nécessaire d'optimalité du 1^{er} ordre ; comme pour le théorème 2.1 cette condition n'est pas suffisante et pour un problème de maximisation, nous aurions la même condition.

Nous considérons le **problème** (avec **c**ontraintes d'**é**galités) :
(C.E.) Minimiser $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dans l'ensemble $S = \{v \in \mathbb{R}^n \ / \ \mathcal{F}(v) = 0\}$ avec $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Nous avons le théorème suivant qui généralise le théorème 2.1 .

Théorème 2.3. *Soit le problème (C.E.) avec J et $\mathcal{F}$ continues.*
(i) Si J tend vers l'infini quand $\|v\| \longrightarrow +\infty$ ou si K est (fermé), borné alors J atteint son minimum (ou maximum) en au moins un point v^* .
(ii) Si J et $\mathcal{F}$ sont différentiables et si J atteint un minimum (ou maximum) local en v^* (point régulier pour S), alors il existe $\lambda_j^* \in \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, m$ (les multiplicateurs de Lagrange) tels que on ait la C.N.O. :

$$\forall w \in \mathbb{R}^n \qquad J'(v^*)\,w + \ {}^t\lambda \ \mathcal{F}'(v^*)\ w \ = \ 0$$

ou $\quad \textit{grad}\ J(v^*) \ + \ {}^t\mathcal{F}'(v^*)\ \lambda \ = \ 0$.

Remarque 2.3. *En pratique, il est commode d'introduire le Lagrangien $\mathcal{L}(v, \lambda) = J + {}^t\lambda\,\mathcal{F}$ la C.N.O. s'écrit : $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(v^*, \lambda^*) = 0$ sans oublier la contrainte sous la forme : $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(v^*, \lambda^*) = 0$.*

<u>Démonstration</u>
(i) Comme dans le cas sans contraintes avec une suite minimisante ; comme les $\mathcal{F}$ sont continues, S est fermé et les limites de sous-suites sont bien dans S ; dans le cas où S est fermé, borné, on utilise la compacité des fermés, bornés de $\mathbb{R}^n$.

(ii) Nous pouvons d'abord dégager le

Lemme 2.2. *Sous les hypothèses du théorème, $\forall w \in K_T(v^*) \qquad J'(v^*)\,w = 0$.*

La démonstration de ce lemme est très simple et utilise la même idée que dans le cas sans contraintes : on utilise les variations de v^* ; on les prend ici, sous la forme d'une courbe de S passant par v^* : $t \longmapsto v(t)$; on a donc

$$J(v^*) \ \leq \ J(v(t)) \qquad \text{et donc} \qquad \frac{J(v(t)) - J(v^*)}{t} \ \geq \ 0$$

pour tout $t > 0$; en faisant tendre $t \longrightarrow 0^+$ on obtient $J'(v^*) \left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{t=0} \geq 0$
avec $t < 0$ et $t \to 0^-$, on obtient $J'(v^*) \left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{t=0} \leq 0$ et donc
$J'(v^*) \left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{t=0} = 0$ ou par définition de l'espace tangent : $\forall w \in K_T(v^*) \quad J'(v^*)\, w = 0$

■

Pour la démonstration du (ii) du théorème, on utilise ce lemme et la caractérisation

$$K_T(v^*) \;=\; K_G(v^*) \qquad \text{(théorème 2.2)}$$

et on conclut comme dans le cas avec contraintes linéaires avec la proposition 1.6 qui fournit l'existence des λ.

■

Voici quelques exercices d'application directe de ce théorème.

Exercice 2.7. *Soit $m \in I\!R^n$, trouver la distance de m à l'hyperplan* $\{x \in I\!R^n \;\; / \;\; \sum a_i x_i - b = 0\}$.

Solution La fonctionnelle à minimiser n'est pas précisée ; si $J(x) = \dfrac{1}{p} \sum |x_i - m_i|^p$, le Lagrangien est

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = J(x) + \lambda \left(\sum a_i x_i - b\right) \qquad \text{et la C.N.O.}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{donne} \qquad |x_i - m_i|^{p-1}\; sgn\; |x_i - \mathcal{F}_i| + \lambda a_i = 0$$

avec
$\sum a_i x_i - b = 0$

pour un calcul effectif, on essaye de tirer x_i de la $1^{\text{ère}}$ équation en fonction de λ et de reporter dans la contrainte ; pour simplifier prenons $p = 2$;

$$\lambda = \frac{b - \sum a_i x_i}{\sum a_i^2} \qquad x_i = m_i - \lambda a_i$$

et $\dfrac{1}{2} \dfrac{|b - \sum a_i m_i|^2}{\sum a_i^2}$ carré de la distance euclidienne à un hyperplan ; formule élémentaire connue.

Cet exemple pouvait se traiter avec le théorème 2.1 ; mais voici une situation "duale " qui relève du théorème précédent.

Exercice 2.8. *Minimiser $J(x) = \sum a_i x_i$ avec la contrainte* $\sum |x_i|^p - 1 = 0$

solution $\mathcal{L} = J + \lambda \mathcal{F} \quad$ avec $\quad \mathcal{F}(x) = \sum |x_i|^p - 1$
C.N.O.

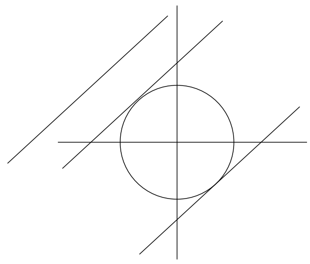


FIG. 2.7 – Exercice 2.8, minimisation d'une fonction J

$a_i + \lambda\, p\, |x_i|^{p-1}\, sgn\, x_i \ = \ 0$
avec $\sum |x_i|^p - 1 = 0$
dans le cas $p = 2 \quad x_i = \dfrac{a_i}{2\lambda}$
et $\dfrac{1}{4\lambda^2} \sum a_i^2 \ - 1 = 0$ donne $\lambda^2 = \dfrac{\sum a_i^2}{4}$

$$x_i^{*\pm} = \frac{\pm\, a_i}{(\sum a_i^2)^{1/2}} \qquad J(x_i^{*\pm}) = \pm(\sum a_i^2)^{1/2}$$

La C.N.O. fournit 2 solutions dont l'interprétation géométrique est évidente ; pour les départager il faut une condition de $2^{\text{ième}}$ ordre (voir ...)

Exercice 2.9. *soit $a = (1, 0)$, trouver la distance de a à la parabole d'équation $y^2 = 4\,x$; ceci par 3 méthodes :*
i) tirer x en fonction de y
ii) tirer y en fonction de x
iii) utiliser les multiplicateurs de Lagrange
Comparer et commenter les résultats trouvés.

Exercice 2.10. *Soit $\mathcal{F}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2$*
et $S = \{x \in I\!\!R^3 \ / \ \mathcal{F}(x) = 0\}$
a) Soit $\mathcal{G}$ orthogonal à $\mathcal{F}'(x)$, construire une courbe tangente à $\mathcal{G}$.
b) Ecrire une C.N.O. avec le plan tangent en x^* minimum de $J(x) = x_1+x_2+x_3$ sur S ; trouver x^* .
c) Comparer avec la C.N.O. avec multiplicateurs de Lagrange ; trouver x^*.
d) Vérifier la C.S.O. du 2^{nd} ordre.

2.3.2 Minimisation avec contraintes d'inégalités

Introduction

On a vu lors de la démonstration de la C.N.O. du 1^{er} ordre avec contraintes d'égalités linéaires que l'on utilisait un résultat d'équivalence entre la résolubilité d'un système surdéterminé $B\mathbb{L} = g$ et le fait que g soit orthogonal au noyau de ${}^tB$ (proposition **??**) ; dans le cas d'égalités linéaires $Ker\ {}^tB = \{w \in I\!\!R^n \ / \ {}^tb_j\, w = 0\}$ (b_j sont les colonnes de B) est un ensemble de directions admissibles.

En présence de contraintes d'inégalités, les directions admissibles sont maintenant définies par des inégalités comme le montre l'exemple ci-dessous ;

Considérons *l'exemple* très simple suivant :
minimiser la fonction $J(x)$ avec la contrainte
$(b_1, x) \leq c_1$; soit x^* le minimum ; si $(b_1, x^*) = c_1$, on a donc $J(x^*+\rho y)-J(x^*) \geq 0$ pour $(b_1, y) \leq 0$ et donc en divisant par ρ et en faisant tendre $\rho > 0$ vers zéro $J'(x^*, y) \geq 0$ pour $(b_1, y) \leq 0$; si $(b_1, x^*) < c_1$, on trouve $J'(x^*, y) = 0$

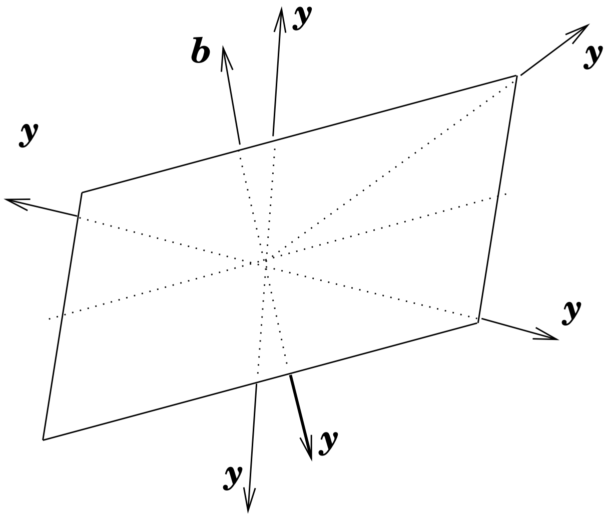


FIG. 2.8 –

Comme $grad\, J(x_*)$ doit avoir un produit scalaire positif avec tous les y qui vérifient $(b_1, y) \leq 0$, on voit intuitivement que $grad\, J(x_*)$ doit être de la forme $grad\, J(x_*) = -\lambda_1\, b_1$ avec $\lambda_1 \geq 0$.

Exercice 2.11. *montrer l'existence de $\lambda_1 \geq 0$ dans l'exemple ci-dessus.*

Exercice 2.12. *Pour la fonction $J(x) = J(x^1, x^2) = \dfrac{1}{2}\left[(x^1-1)^2 + (x^2-1)^2\right]$ on cherche à minimiser avec 2 contraintes $(b_1, x) \leq 0$ et $(b_2, x) \leq 0$*
a) à l'aide d'un dessin, distinguer dans quels cas le minimum est atteint en ${}^t x_m = (1, 1)$.

<u>**Indications.**</u> Le minimum x_m de J sans contraintes est $x_m^1 = 1$, $x_m^2 = 1$; suivant la position de la droite d'équation $(b_1.x) = 0$ par rapport à ce minimum nous avons deux situations très différentes.

1^{er} *Cas.* Si $(b_1 \,.\, x_m) < 0$ alors pour ρ assez petit $x = x_m + \rho y$ vérifie encore la contrainte pour tout $y \in I\!R^2$; toutes les directions sont admissibles et $J'(x_m, y) = 0$ pour tout $y \in I\!R^2$ comme en l'absence de contraintes ; en fait dans ce cas cette

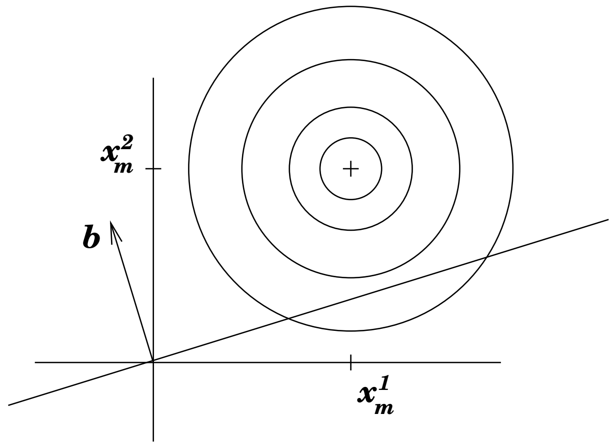


FIG. 2.9 –

contrainte est inutile et n'influe pas sur la minimisation de J.

$2^{ième}$ *Cas.* Si au contraire $(b_1 \,.\, x_m) > 0$ comme sur la figure 2.9, on constate en regardant les courbes de niveau que le minimum $x_* \neq x_m$ se trouve sur la droite $(b_1 . x) = 0$ mais alors $x = x_* + \rho y$ ne vérifie la contrainte que si $(b_1 . y) \leq 0$. Il reste à discuter la contrainte $(b_2, x_m) < 0$

Exercice 2.13. *Reprendre dese exercices de projection sur sous espaces affines ; remplacer les e'galités par des inégalités et essayer de trouver directement le minimum ; utiliser aussi le théorème ci dessous.*

Exercice 2.14. *Voir les exercices de barres avec blocages du chapitre sur les exemples me'caniques.*

Conditions d'optimalité du premier ordre

Nous considérons le problème (avec **C**ontraintes d'**I**négalités)
(C.I.) Minimiser $J : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ dans l'ensemble $K = \{v \in I\!R^n / \mathcal{E}(v) = 0 \text{ et } \mathcal{F}(v) \leq 0\}$
avec $\mathcal{E} : I\!R^n \longrightarrow I\!R^m \quad m \leq n$
$\mathcal{F} : I\!R^n \longrightarrow I\!R^p$

Comme nous l'avons vu dans l'exemple en un point v^0 donné on peut avoir $\mathcal{F}_i(v^0) < 0$ ou $\mathcal{F}_i(v^0) = 0$ suivant les indices considérés.

Définition 2.3. *Une contrainte d'inégalité $\mathcal{F}_i(v) \leq 0$ est dite saturée au point v^0 si en ce point $\mathcal{F}_i(v^0) = 0$; si $\mathcal{F}_i(v^0) < 0$ elle est dite non saturée ; par convention une contrainte d'égalité est saturée en ce point ; on note $sat(v_0)$ les indices de contraintes saturées en v_0.*

Ainsi une contrainte non saturée en un point v^0 ne restreint pas le domaine admissible au voisinage de v^0 ; il faut donc s'attendre que les conditions d'optimalités locales ne fassent intervenir que les contraintes saturées au minimum local.

Comme dans le cas de contraintes d'égalités et pour simplifier, nous faisons une hypothèse de régularité.

Définition 2.4. *$v^0 \in K$ défini en (C.I.) est dit régulier pour K, si les $\mathcal{E}'_j(v^0)$ $j = 1, \cdots, m$ et les $\mathcal{F}'_k(v^0)$ pour $k = 1, \cdots, p$, et $k \in sat(v^0) = \left\{ \text{indices de contrainte saturée en } v^0 \right\}$ sont des formes linéaires indépendantes.*

Voici le théorème qui exprime la condition d'optimalité locale du premier ordre ; la seule mais importante nouvauté réside dans le $bf signe$ des multiplicateurs de Lagrange ; le résultat suivant est connu comme *condition de Karush-Kuhn-Tucker*. Attention comme il y a 2 façons d'écrire une inégalité et que l'on peur écrire le Lagrangien avec + ou − devant le multiplicateur de Lagrange les conditions de signe du théorème ci dessous dépendent de la convention choisie.

Théorème 2.4. *Soit le problème (C.I.) avec J ,$\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ continues.*

(i) Si J tend vers l'infini quand $\|v\| \to +\infty$ (Hypothèse $H1$ du §1.3.1) ou si K est (fermé), borné, alors J atteint son minimum (ou maximum) en au moins un point $v^* \in K$

(ii) Si J ,$\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont différentiables et si J atteint un minimum (ou maximum) local en v^*, point régulier pour K, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(v^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$

$$\mu^* \geq 0 \quad , \quad {}^t\mu^* \ \mathcal{F}(v^*) = 0$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(v^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}(v^*, \lambda^*, \mu^*) \leq 0$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{L}(v, \lambda, \mu) = \mathcal{J}(v) + {}^t\lambda \ \mathcal{E}(v) + {}^t\mu \ \mathcal{F}(v)$$

Remarque 2.4. *la condition $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = 0$ peut s'expliciter en*
$J'(v^*) + {}^t\lambda^* \ \mathcal{E}'(v^*) + {}^t\mu^* \ \mathcal{F}'(v^*) = 0$
ou
$gradJ(v^*) + {}^t\mathcal{E}'(v^*) \ \lambda^* + {}^t\mathcal{F}'(v^*) \ \mu^* = 0$ *;*
les conditions $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$ $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} \leq 0$ ne font que redire les contraintes : $\mathcal{E} = 0$ et $\mathcal{F} \leq 0$;
la condition $\mu^* \geq 0$ est typique des contraintes d'inégalités ; si l'on avait pris des contraintes $\mathcal{F}(v) \geq 0$, μ^* serait alors négatif ; enfin comme $\mu^*_k \geq 0$ et $\mathcal{F}_k(v^*) \leq 0$ la condition ${}^t\mu^*\mathcal{F}(v^*) = 0$ donne simplement $\mu^*_k \mathcal{F}_k(v^*) = 0$, $k = 1, \cdots, p$; l'interprétation est que $\mu^*_k = 0$ si $\mathcal{F}_k(v^*) < 0$ (c'est à dire si contraintes non saturées)

Démonstration.

(i) Pour l'existence, cela est encore analogue au cas sans contraintes ; remarquons d'abord que comme $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont continues, les contraintes sont un ensemble K fermé ; soit $I = \inf_{v \in K} J(v)$ et (v^k) une suite minimisante : $J(v^k) \longrightarrow I$; si K est borné la suite l'est aussi ; dans le cas contraire, l'hypothèse $H1$ du § 1.3.1. et le lemme 1.1 assurent que cette suite est bornée ; on peut donc extraire une sous-suite convergente : $v^k \to v^*$; comme K est fermé, $v^* \in K$; la continuité de J donne de plus $J(v^{k'}) \longrightarrow J(v^*)$ on a donc $I = J(v^*)$ et le minimum est atteint en v^*.

(ii) Considérons l'ensemble $S_{v_*} = \{v \in I\!R^n / \ \mathcal{E}(v) = 0 \text{ et } \mathcal{F}_{sat}(v) = 0\}$ il est défini à l'aide des mêmes égalités $\mathcal{E}(v) = 0$ que K et l'on a remplacé les inégalités $\mathcal{F}(v) \leq 0$ par les égalités $\mathcal{F}_{sat(v_*)}(v) = 0$ où $\mathcal{F}_{sat(v_*)}$ désigne $[\mathcal{F}_i]_{i \in sat(v^*)}$ $\quad (sat(v^*)$ sont les indices tels que $\mathcal{F}_i(v) \leq 0$ soit saturée en $v = v^*)$; comme $S_{v^*} \subset K$, la fonction J atteint donc son minimum au point v_*, le théorème 2.3 assure que le Lagrangien

$$\mathcal{L}(v, \lambda, \mu) = \mathcal{J}(v) + {}^t\lambda\, \mathcal{E}(v) + {}^t\mu_{sat(v_*)}\ \mathcal{F}_{sat(v_*)}(v)$$

vérifie en $(v^*, \lambda^*, \mu^*_{sat(v_*)})$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(v^*, \lambda^*, \mu^*_{sat(v_*)}) = 0 \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda^*}(v^*, \lambda^*, \mu^*_{sat(v^*)}) = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu^*}(v^*, \lambda^*, \mu^*_{sat(v^*)}) = 0$$

Mais comme v^* réalise un minimum local sur K qui contient S_{v^*}, nous avons des conditions supplémentaires sur le signe des μ_i^* pour i indice de contrainte d'inégalité saturée.

Comme v^* est régulier le noyau de ${}^tB = [{}^t\mathcal{E}'(v^*)\ ,\ {}^t\mathcal{F}'_{sat(v^*)}(v^*)]$ est réduit à zéro :
$${}^tB \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu_{sat(v^*)} \end{bmatrix} = {}^t\mathcal{E}'(v^*)\,\lambda \ +\ {}^t\mathcal{F}'(v^*)\,\mu_{sat(v^*)} \ = \ 0$$
entraine $\lambda = 0$ et $\mu_{sat(v^*)} = 0$; avec la proposition **??**, l'opérateur B est donc surjectif ; soit donc k_0 un indice de contrainte d'inégalité saturée ; on peut trouver w telque

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(v^*)\, w &= 0 \\ \mathcal{F}'_i(v^*)\, w &= 0 \quad \text{pour } i \neq k_0 \quad \text{et} \quad i \in sat(v^*) \\ \mathcal{F}'_{k^0}(v^*)\, w &< 0 \end{aligned}$$

soit alors,

$$S^{k^0}_{v^*} = \{v / \mathcal{E}(v) = 0 \ \text{ et } \ \mathcal{F}_i(v) = 0 \quad i \in \ sat(v^*) - \{k^0\}\}$$

et soit $t \longmapsto v(t) \in S^{k^0}_{v^*}$ telle que $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = w$; comme v^* est régulier, le théorème 2.2 (si w est orthogonal au gradient des contraintes, il est tangent à une courbe tracée sur la surface) assure que pour tout t petit, $v(t)$ existe ;

comme $\mathcal{F}_{k_0}(v(t)) < 0$ donc $v(t) \in K$ pour tout t petit ; la condition d'optimalité $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(v^*, \lambda^*, \mu^*_{sat(v^*)}) = 0$ donne
$$\mathcal{J}'(v^*)\, w \ +\ 0 \ +\ \mu_{k_0}\ {}^t\mathcal{F}'_{k^0}(v^*)\, w \ = \ 0$$

par suite comme $\mathcal{F}'_{k^0}(v^*)\ w \ < \ 0$, μ_{k_0} et $\mathcal{J}'(v^*)w$ sont de même signe ; d'autre part pour t petit $v(t)$ est dans K, donc $\mathcal{J}(v(t)) \geq \mathcal{J}(v^*)$ donne $\mathcal{J}'(v^*)\ \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} \geq 0$ par suite $\mu_{k_0} \geq 0$.

Finalement nous avons obtenu toutes les conditions en posant $\mu_j^* = 0$ pour les indices de contraintes non saturées ; dans ce cas si $\mathcal{F}_j(v^*) < 0 \qquad \mu_j^* = 0$ et

si $\mathcal{F}_i(v^*) = 0 \qquad \mu_i^* \geq 0$

on a donc bien $\mu^* \geq 0$ et ${}^t\mu^* \, \mathcal{F}(v^*) = 0$. ■

Conditions d'optimalité du deuxième ordre

De même que sans contraintes, l'annulation de la dérivée est une condition nécessaire et non suffisante d'optimalité, la situation est analogue en présence de contraintes : il convient d'utiliser les dérivées secondes du Lagrangien. La encore comme dans le cas sans contraintes on n'a pas de conditions nécessaires et suffisantes. Nous utilisons les mêmes notations que pour les conditions du premier ordre. Pour obtenir une condition suffisante assez générale, il est commode d'utiliser des vecteurs obtenus comme limites de sécantes ; on peut donner un contre-exemple où il n'existe pas de courbe qui satisfait $\mathcal{F}(x(t)) = 0$ au voisinage d'un extremum.

Définition 2.5.

$$K_G = \{w \in I\!R^n : \mathcal{E}'(v*)w = 0, \ \mathcal{F}'_{sat(v^*)}w \leq 0\}; \tag{2.5}$$

$$K_T = \{w | x^* + \alpha^k w^k \in K \ and \, w^k \to w\}$$

et l'on a le lemme :

Lemme 6. *Si v^* est régulier $K_T = K_G$*

Pour les conditions du deuxième ordre, il faut considérer des ensembles un peu plus petit.

Théorème 2.5. *(conditions nécessaires du deuxième ordre)*
Soit v^* un point régulier de K où J atteint son minimum ; avec le théorème précédent, il satisfait les conditions du premier ordre. Soit

$$K_{G_2} = \{w \in I\!R^n : \mathcal{E}'(v*)w = 0, \ \mathcal{F}'_{sat^+(v^*)}w = 0, \ \mathcal{F}'_{sat^0(v^*)}w \leq 0\}; \tag{2.6}$$

où $sat^+(v^*)$ désigne les indices de contraintes saturées de multiplicateur strictement positif et $sat^0(v^*)$ désigne les indices de contraintes saturées de multiplicateur nul ; on a :

$$\forall w \in K_{G_2} \ \frac{\partial^2 \mathcal{L}^*}{\partial v^2}(w, w) \geq 0 \tag{2.7}$$

La démonstration utilise un lemme

Lemme 7. *Si v^* est régulier*

$$K_{G_2} = \overline{K_{T_2}}$$

où

$$K_{T_2} = \{w | x^* + \alpha^k w^k \in K_2 \ and \, w^k \to w\}$$

$$K_2 = \{v|\mathcal{E}(v) = 0 \ \mathcal{F}_{sat^+(v^*)}(v) = 0\} \cap K$$

où $sat^+(v^*)$ désigne les contraintes saturées de multiplicateur strictement positif.

Théorème 2.6. *Conditions suffisantes du deuxième ordre*
Si v^* satisfait les conditions du premier ordre et si

$$\forall w \in K_{G_2} \ \frac{\partial^2 \mathcal{L}^*}{\partial v^2}(w, w) > 0 \tag{2.8}$$

alors v^* est un minimum local isolé.

Démonstration Soit la suite $v^k = v^* + \delta^k w^k \in K$ avec $\| w^k \| = 1$ avec $x^k \in K$; on extrait une sous-suite telle que $w^{k'} \to w \in K_G$.

cas 1 : $w \notin K_{G_2}$. Dans ce cas, il existe $i \in sat^+(v^*)$ tel que $\mathcal{F}_i' w < 0$ La condition du premier ordre donne :

$$J'(v^*)w + {}^t\lambda^* \ \mathcal{E}'(v^*)w + {}^t\mu^* \ \mathcal{F}'(v^*)w = 0$$

comme $w \in K_G$ mais $w \notin K_{G_2}$ on en deduit que $J'(v^*)w > 0$ donc pour k' grand $J'(v^*)w^{k'} > 0$ et donc $J(v^{k'}) > J(v^*)$. Notons que la condition du deuxième ordre n'a pas encore servi. C'est donc pour cela qu'il n'y a aucune condition à vérifier pour les $w \notin K_{G_2}$.

cas2 :$w \in K_{G_2}$. Alors comme $v^{k'} \in K$ donc

$$J(v^{k'}) \geq \mathcal{L}(v^{k'}, \lambda^*)$$

or la formule de Taylor fournit :

$$\mathcal{L}(v^{k'}, \lambda^*) = \mathcal{L}^*(v^*, \lambda^*) + \delta^{k'} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(w^{k'}) + \frac{(\delta^{k'})^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^*}{\partial v^2}(w^{k'}, w^{k'}) + o((\delta^{k'})^2)$$

ce qui se simplifie avec la condition du premier ordre :

$$\mathcal{L}(v^{k'}, \lambda^*) = \mathcal{L}(v^*, \lambda^*) + \frac{(\delta^{k'})^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^*}{\partial v^2}(w^{k'}, w^{k'}) + o((\delta^{k'})^2)$$

ou (comme $\mathcal{L}(v^*, \lambda^*) = J(v^*)$)

$$J(v^{k'}) \geq J(v^*) + \frac{(\delta^{k'})^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^*}{\partial v^2}(w^{k'}, w^{k'}) + o((\delta^{k'})^2)$$

Ce qui donne avec la condition du deuxième ordre :

$$J(v^{k'}) > J(v^*)$$

■

Exercice 2.15. *Soit $J(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2$ avec les contraintes $v_i \leq c_i \ \ , i = 1, m \leq n$. En distingant, $a_i < c_i$, $a_i = c_i$, $a_i > c_i$ préciser K_G , K_{G_2}.*

Exercice 2.16. *Soit $j(x, y) = \frac{\sigma x^2}{2} + \frac{y}{2} + x$ à minimiser avec $x \geq 0$; discuter suivant σ.*

Exercice 2.17. *Soit A une matrice symétrique et $J =^t xAx$.*

1. *Soit la contrainte* ${}^t xx = 1$ *; préciser le min de* J *(discuter suivant les valeurs propres de* A*). Ce résultat est souvent attribué à Lord Rayleigh*
2. *Soit la contrainte* ${}^t xx \geq 1$ *; préciser le min de* J*.*
3. *Soit la contrainte* ${}^t xx \leq 1$ *; préciser le min de* J*. On trouve un résultat un peu surprenant : x vecteur propre associé à valeur propre simple négative, les autres étant positives ; considérer le cas* $n = 2, A$ *de valeurs propres 1 et -1 ; tracer les courbes de niveau de J)*
4. *Avec* A*, définie positive, soit la contrainte* ${}^t xx = 1$ *et* ${}^t xx_1 = 0$ *avec* x_1 *vecteur propre associé à plus petite valeur propre ; préciser le min de* J *(discuter suivant les valeurs propres de* A*).*

2.4 Sensitivité de la valeur optimale e la fonction

2.4.1 Introduction, coût marginal

Ce concept est particulièrement utile en microéconomie. Un exemple tiré de la micoéconomie de l'entreprise : soit $J(v)$ le coût de production à minimiser pour un niveau de production déterminé par y et une fonction de production $\mathcal{E}(v; y) = 0$ donné ; il est interéssant de prévoir la variation de la valeur optimale $j(y) = J(v^*(y))$ quand y varie ; c'est le coût marginal.

2.4.2 Résultat

Résultat général

Supposons que pour une valeur y du paramètre, il existe un minimum $v^*(y)$ pour $J(v)$ avec la contrainte $\mathcal{E}(v; y) = 0$ et que ce minimum satisfait les conditions suffisantes du premier et du deuxième ordre, alors :

$$j'(y) =^t \lambda \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y}$$

avec λ, le multiplicateur de Lagrange :

$$J'(v^*(y)) +^t \lambda \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v} = 0$$

Justification

Limitations : la démonstration de la dérivablilité s'appuie sur le théorème des fonctions implicites ; il s'applique si la condition suffisante d'optimalité su deuxième ordre est satisfaite.

Limitons nous au cas quadratique : la CNO du premier ordre s'écrit :

$$Av - f + B\lambda = 0 \tag{2.9}$$

$$^t Bv = y \tag{2.10}$$

Pour montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique, il faut montrer que :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ ^t B & 0 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

est inversible ; soit $\binom{w}{\mu}$ un élément du noyau ; on a alors :

$$Aw + B\mu = 0 \tag{2.12}$$

$$^t Bw = 0 \tag{2.13}$$

d'où $^t wAw = -^t B\mu = 0$ mais $^t Bw = 0$ signifie que w est dans l'espace tangent à la contrainte ; comme A est le Hessien du Lagrangien, la CSO du deuxième ordre entraine que $w = 0$; le noyau est donc réduit à zero.

Cas particulier

En microéconomie, on a souvent $\mathcal{E}(v; y) = \mathcal{E}\prime(v; y) - y$; dans ce cas,

$$j'(y) = -\lambda$$

Conséquence : si $\lambda < 0$, $j(y)$ d'écroit avec y.

Exercice 2.18. $J = p_1 v_1 + p_2 v_2$, $\mathcal{E}(v; y) = a v_1^\alpha v_2^\beta - y$

Bibliographie

[1] J. S. Arora ; O. A. Elwakeil ; A. I. Chahande ; & C. C. Hsieh, Global optimization methods for engineering applications : a review. Struct. Optim. 9, pp 137-159, 1995.

[2] Y. Bamberger, Mcanique de l'ingnieur I, Systmes de corps rigides, Hermann 1981.

[3] M. Berger & B. Gostiaux, Gomtrie diffrentielle, Armand Colin, 1972.

[4] J. Ca , Optimisation, thorie et algorithmes, Dunod.

[5] L. Corradi, Instabilit delle strutture, clup, Milano, 1990.

[6] R. Fletcher, Practical methods of optimization, constrained optimization, John Willey & sons, vol 2, 1981.

[7] D. G. Luenberger, Linear and Nonlinear Programming, Second edition, Addison Wesley 1996.

[8] F. Pham, Gomtrie et calcul diffrentiel sur les varits, Interditions, 1992.

[9] M. Schatzman, Analyse numrique, cours et exercices pour la licence, Interditions, 1991.

[10] G. Strang, Introduction to applied mathematics, Weleslley-Cambridge Press, 1986.